LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 24. November 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 6

Abgabe bis Montag, 04. Dezember 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1	Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ divergent für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent oder die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, so ist sie auch bedingt konvergent.	◯ wahr / ◯ falsch
	Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert < 1$ für alle $k \geq N$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.	◯ wahr / ◯ falsch
2	Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a$ ist genau dann konvergent, wenn $a = 0$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} = \frac{3}{2}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.	◯ wahr / ◯ falsch
	Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe. Dann ist $(a_k - a_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.	◯ wahr / ◯ falsch
	Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es existiere $R = \lim_{k\to\infty} \left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert$. Divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so ist $R > 1$.	◯ wahr / ◯ falsch

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 24.11.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2^k}$, (3 Punkte)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} \binom{3k}{k}$, (3 Punkte)

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^m q^k$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $0 < \lvert q \rvert < 1$. (3 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie im Quotientenkriterium (Satz 6.7) implizit benutzen, dass ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Bitte überprüfen Sie dies jedes Mal, wenn Sie das Quotientenkriterium anwenden wollen.

4	**Ab sofort dürfen Sie** (außer in Teil a) dieser Aufgabe, oder wenn etwas anderes angegeben ist) **das folgende Konvergenzkriterium in den Hausaufgaben und Klausuren verwenden:** **Grenzwertkriterium** Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen mit positiven Gliedern und gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, so haben die beiden Reihen dasselbe Konvergenzverhalten (d.h. sie sind dann beide konvergent oder beide divergent). Strebt $\frac{a_n}{b_n}$ mit $n \to \infty$ gegen 0, so kann man aus der Konvergenz der zweiten Reihe die der ersten folgern. a) Zeigen Sie das Grenzwertkriterium (3 Punkte) **Hinweis:** Sie können im Fall $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} L \in \mathbb{R}$ versuchen, die Abschätzung $a_n \leq (1+L)b_n$ für gewisse $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten. b) Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ ein Polynom mindestens 2-ten Grades ($N \geq 2$ und $a_N \neq 0$), dass keine Nullstellen in $\mathbb{N}$ besitzt. Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Reihe $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p(j)}.$$ (3 Punkte) **Hinweis:** Berechnen Sie zunächst den Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \frac{p(j)}{b_j}$ für eine geeignete Vergleichsreihe $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ und schließen dann auf $\lim_{j\to\infty} \frac{\lvert p(j)\rvert}{\lvert b_j\rvert}$.
5	a) Zeigen Sie die Existenz der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mithilfe des Grenzwertkriteriums. (1 Punkt) b) Zeigen Sie die Existenz der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mithilfe des Majorantenkriteriums. (1 Punkt) c) Zeigen Sie die Existenz der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mithilfe des Wurzelkriteriums. (1 Punkt) d) Zeigen Sie die Existenz der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ mithilfe des Leibnizkriteriums. (1 Punkt)
6	Finden Sie ein Gegenbeispiel zu der folgenden Aussage: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent. (2 Punkte)
7	Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern $$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2006}}{1+nx}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. (3 Punkte)
8	**Wiederholung** Zeigen Sie die gleichmäßige Stetigkeit von $$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$ (2 Punkte)