L EHRSTUHL A FÜR M ATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 12. Januar 2007

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 10

Abgabe bis Montag, 22. Januar 2007, 09:45 Uhr

<table>
<tr><td colspan="3">Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td colspan="2">Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td></tr>
<tr><td>Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch f^2 Riemann-integrierbar.</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td>Ist f Riemann-integrierbar und g beschränkt, so ist $f \cdot g$ Riemann-integrierbar.</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td>Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Definiere die Abbildungen $f_+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch
$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$
Dann gilt:
Sind f_+ und f_- Riemann-integrierbar, so ist $|f|$ Riemann-integrierbar.</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td>Sind f und g Riemann-integrierbar, so gilt
$$\left| \int_a^b f + g dx \right| \leq \int_a^b |f| dx + \int_a^b |g| dx.$$</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td></tr>
<tr><td>Ist $0 < \alpha < 1$ sowie $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ und αf Riemann-integrierbar, so gilt
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td>Sind $f - g$ und g Riemann-integrierbar, so gilt
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$</td><td>◯ wahr / ◯ falsch</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td></tr>
</table>

	Ist zusätzlich $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq 0$ sowie $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [-1,1]$, so gilt $$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-1,1]$, so ist $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.	◯ wahr / ◯ falsch

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis **Freitag, den 19.01.2007**, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

4	Ein Problem des Newtonverfahrens liegt in dem Finden geeigneter Startwerte. Bestimmen Sie die Menge aller Startwerte, für die das Newtonverfahren für die Funktion $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-\frac{1}{3}x^3}$$ gegen eine Nullstelle von f konvergiert. (3 Punkte)
5	Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Weiter sei g beschränkt und Riemann-integrierbar mit $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch f Riemann-integrierbar ist und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt. (3 Punkte)
6	Zeigen Sie: Sind $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar, so ist $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log\lvert f(x)\rvert.$$ (3 Punkte)
7	Bestimmen Sie jeweils das Integral. a) $\int_{-3}^{0} x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ (2 Punkte) b) $\int \frac{1}{6x^2-6x+3}\,\mathrm{d}x$ (Hinweis: Bringen Sie das Integral durch Umformungen und Substitutionen auf eine Form, die es Ihnen erlaubt, die Aussage nach Definition 5.12 anzuwenden.) (3 Punkte) c) $\int e^{2x}\sin(e^x)\,\mathrm{d}x$ (3 Punkte) Bei partieller Integration ist explizit anzugeben, wie f' und g gewählt wurden. Ebenso ist bei einer Substitution kenntlich zu machen, was wodurch ersetzt wird.

8	a) Schreiben Sie das Polynom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ als Produkt von Polynomen der Form $x - a$, $a \in \mathbb{R}$ und nullstellenfreien Polynomen der Form $x^2 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (3 Punkte) **Tipp:** Nullstellen raten, Polynomdivision b) Schreiben Sie $\frac{x^2}{p(x)}$ als Summe von Quotienten der Form $\frac{A}{(x-a)}$, $\frac{B}{(x-a)^2}$, $\ldots$ und $\frac{Cx+D}{ax^2+b}$, so dass jede k-te Nullstelle a den Beitrag $\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-a)^j}$ und jedes nullstellenfreie Polynom $(x^2 + ax + b)^k$ den Beitrag $\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j x + B_j}{(x^2+ax+b)^j}$ liefert. (3 Punkte) c) Berechnen Sie das Integral $$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2}\, \mathrm{d}x$$ (3 Punkte)