LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 9. November 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 4

Abgabe bis Montag, 20. November 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.		
1	Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage vom formalen Gesichtspunkt aus korrekt ist. (Achten Sie auf die Unterscheidung von Folgen, Folgengliedern und Grenzwerten!)	
	a_n ist monoton wachsend.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
	Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a$.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
	Es gilt $a_n = a \quad (n \to \infty)$.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
	Die Folge a_n konvergiert gegen a.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
	Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \pm 1$.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
	Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}\cdot 1 \to 0 \cdot 1 = 0 \quad (n\to\infty)$.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
2	Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Entscheiden Sie jeweils, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist.	
	Hat eine Folge keinen Häufungspunkt, so ist sie nicht beschränkt.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt $\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen 0.	◯ wahr / ◯ falsch
	Hat eine Folge genau zwei Häufungspunkte, so ist sie beschränkt.	◯ wahr / ◯ falsch
	Hat eine Folge genau einen Häufungspunkt, so ist sie konvergent.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt $a_{n+1} > a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞.	◯ wahr / ◯ falsch
	Hat eine Folge mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist sie divergent.	◯ wahr / ◯ falsch
	Jede Folge hat höchstens zwei Häufungspunkte.	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist eine Folge nach oben beschränkt, so besitzt sie einen Limes superior in $\mathbb{R}$.	◯ wahr / ◯ falsch
Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 17.11.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.		

3	Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. a) Hat eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$, so ist a auch Häufungspunkt ihrer Wertemenge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (1 Punkt) b) Ist eine Folge konvergent, so hat sie genau einen Häufungspunkt. (1 Punkt) c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. (1 Punkt)
4	Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{4n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (3 Punkte) b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{q^n}{n^k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < q \leq 1$. (3 Punkte)
5	Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + a_n + 3)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (5 Punkte)
6	Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+1}{x+1}$ auf Injektivität, Surjektivität und Stetigkeit. (3 Punkte)
7	Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt: $M_f := \{x \in D \mid f(x) > 0\}$ ist offen. (4 Punkte)
8	Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls existent. a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$. (2 Punkte) b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{2004}-1}{x^{256}-1}$. (2 Punkte) **Hinweis:** Sie dürfen die Stetigkeit der Wurzel auf $[0,\infty)$ ohne Beweis benutzen. Denken Sie außerdem an das Kürzen der Ergebnisse.
Sie dürfen in den genannten Aufgaben das Sandwich-Lemma von Blatt 3 verwenden.	