LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 29. Oktober 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 2

Abgabe bis Montag, 06. November 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.		
1	Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	
	Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ hat ein Supremum, und dieses Supremum liegt in $\mathbb{R}$.	◯ wahr / ◯ falsch
2	Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	
	Für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k}$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.	◯ wahr / ◯ falsch
3	Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente der gegebenen Menge. (Um Verwechselungen mit dem Dezimalkomma zu vermeiden, sind hier die Elemente der Mengen durch Semikola – und nicht wie in der Vorlesung durch Kommata – getrennt.)	
	$\{1;\{2;3\}\} \setminus \{2;3\}$	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4
	$\{1;2\} \cap \{2;4\}$	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4
	$\{\emptyset;1;\{1\};\{1;1\}\}$	◯ 0 / ◯ 1 / ◯ 2 / ◯ 3 / ◯ 4
Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 3.11.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.		

4 Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Lemma 1.1:

(4) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$, (2 Punkte)

(5) $x > y, x > 0, y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, (2 Punkte)

(6) $x > y, w \geq z \Rightarrow x + w > y + z$. (2 Punkte)

Bemerkung: Generell gilt, dass Sie zum Beweis eines Aussage der Vorlesung alle Aussagen der Vorlesung verwenden dürfen, die zuvor genannt werden. Unabhängig vom Bewieis von Aussagen der Vorlesung dürfen Sie in jeder Teilaufgabe die Aussagen vorheriger Aufgaben und Teilaufgaben verwenden.
Bemerkung: Kennzeichnen Sie bitte alle verwendeten Anordnungsaxiome. Die Körperaxiome dürfen Sie nun ohne Zitat verwenden. Machen Sie nicht zu viele Umformungen gleichzeitig! Ist nicht mehr ersichtlich, welche Umformung von Ihnen verwendet wurde, so wird sie als nicht gezeigt bewertet.

5 Beweisen Sie Satz 1.7 der Vorlesung:
Satz 1.7 (Geometrische Summenformel) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

(wobei $0^0 = 1$ gesetzt wird).
Bemerkung: Normalerweise dürfen Sie alle Aussagen der Vorlesung in den Hausaufgaben verwenden, mit einer Ausnahme: Sollen Sie Aussagen der Vorlesung beweisen, die dort behandelt aber nicht bewiesen wurden, so dürfen Sie diese nicht einfach zitieren, sondern sollen einen Beweis finden, der sich nur auf vorherige Ergebnisse (ob aus den Übungen oder aus der Vorlesung (vor der entsprechenden Aussage)) stützt.

(3 Punkte)

6 Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{n+1}{a(a+n+1)}$$

a) Beweisen Sie obige Behauptung mit vollständiger Induktion. (3 Punkte)

b) Schreiben Sie den k-ten Summanden der obigen Summe als Differenz zweier Brüche und berechnen Sie die Summe, ohne das Ergebnis aus der Behauptung zu benutzen. (2 Punkte)

Hinweis: Der „Trick“ in b) wird häufig als Teleskopsumme bezeichnet.

7

Zeigen Sie die folgenden Aussagen von Lemma 1.4:

Lemma 1.4 Es gelten folgende Aussagen:

(4) $A = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A$. (2 Punkte)

(8) $\complement(\complement A) = A, A \cup \complement A = \mathbb{R}, A \cap \complement A = \emptyset$ (1 Punkte)

(9) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$. (2 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen ein paar grundlegende Eigenschaften von Mengen verwenden, etwa (für beliebige Mengen A, B):

a) $A \subset B$ und $B \subset A \Leftrightarrow A = B$,

b) $A \subset A \cup B$,

c) $x \in A, A \subset B \Rightarrow x \in B$,

d) $A \subset B$ und C eine Menge, dann ist $A \cup C \subset B \cup C$ sowie $A \setminus C \subset B \setminus C$ und $C \setminus B \subset C \setminus A$.

e) $A \cup A = A$,

f) $A \setminus A = \emptyset$,

g) $A \subset B \subset A \Rightarrow A = B$,

h) Gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, so folgt $A = B$.

8

a) Zeigen Sie: Jeder innere Punkt einer Menge ist auch einer ihrer Häufungspunkte. (1 Punkt)

b) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x keine Häufungspunkt von M ist, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in der ε-Umgebung $B_\varepsilon(x)$ von x nur endlich viele Punkte von M liegen.(2 Punkte)

c) Sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Bestimmen Sie die Häufungspunkte und inneren Punkte von M. Benutzen Sie diese Ergebnisse, um zu schließen, ob M offen oder abgeschlossen ist. (Hinweise: Wie allgemein üblich dürfen Sie für die Bearbeitung eines Aufgabenteils die Ergebnisse früherer Teile benutzen, auch wenn Sie sie nicht gelöst haben (hier darf also Teil a) angewendet werden). Die Formulierung „Bestimmen Sie die ...“ verlangt nicht nur eine Bestimmung, sondern auch einen Beweis, dass keine weiteren der gesuchten Objekte existieren.) (4 Punkte)