LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 20. November 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 5

Abgabe bis Montag, 27. November 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen korrekt sind.

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(\sqrt{x})$ eine stetige Funktion.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Geben Sie die Menge aller Punkte an, in denen die Funktion $$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbb{Q}\\ g(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$ unstetig ist. $$A=\mathbb{R},\quad B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\quad C=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\},$$ $$D=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq g(x)\},\quad E=\{\}.$$	◯ A / ◯ B / ◯ C / ◯ D / ◯ E
Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Geben Sie die Menge aller Punkte an, in denen die Funktion $$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)<g(x)\\ g(x), & g(x)\leq f(x)\end{cases}$$ stetig ist. $$A=\mathbb{R},\quad B=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\},\quad C=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<g(x)\},$$ $$D=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\leq f(x)\},\quad E=\{\}.$$	◯ A / ◯ B / ◯ C / ◯ D / ◯ E

2 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen korrekt sind.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^0$ ist eine gleichmäßig stetige Funktion.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Ist $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist $\lvert f\rvert:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
$f:[5,7]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2+x+3}}$ ist eine gleichmäßig stetige Funktion.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig, so ist $\frac{1}{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt

	Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $g:[b,c]\to\mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann ist die Funktion $$h:[a,c]\to\mathbb{R},\quad h(x)=\begin{cases} f(x), & x\le b\\ g(x), & x>b\end{cases}$$ stetig.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 24.11.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

3 Zeigen Sie:

a) Es gibt keine stetige und surjektive Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, (2 Punkte)

b) Jede stetige und injektive Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist streng monoton. (3 Punkte)

Beachte: Es gibt sehr wohl stetige Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und surjektive Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aber keine Funktion, die sowohl stetig als auch injektiv ist. Um solche Funktionen mit beiden Eigenschaften geht es in Teil a), in Teil b) entsprechend um Funktionen, die sowohl stetig als auch injektiv sind.
Hinweis: Ein Bild ist keine Antwort, aber evtl. hilfreich, um auf eine Idee zu kommen.

4 Ein komplexes Computerprogramm für hochsichere Anwendungen (etwa Atomkraftwerke, Flugzeuge, medizinische Geräte, usw., also etwas, von dem Menschenleben abhängen) ist in der Testphase des Gesamtsystems angekommen. Sie organisieren mehrere Testphasen um die Auflagen des Kunden zu erfüllen, das höchstens 1 Fehler pro einer Million Zeilen Code vorhanden sein darf. Jede Testphase (Phase i) gliedert sich in:

(T1) Generiere 1000 zufällige, unabhängige, realistische und breit gestreute Programmeingaben und definiere die zulässigen Programmausgaben (in gewissen Grenzen).

(T2) Teste die Reaktion des Programms auf die Eingaben und dokumentiere die auftretenden Fehler. Es treten f_i Fehler auf.

(T3) Korrigiere die Fehler im System (mit anschließendem Test durch die problematische Eingabe).

Nehmen Sie nun an, Schritt T1 würde korrekt erledigt und Sie könnten das dem Kunden glaubhaft machen. Sie führen 5 Testphasen durch und korrigieren dabei jeweils die auftretenden Fehler. Der Programmcode umfasst 50 Millionen Zeilen (diese Zahl ist invariant unter der Fehlerkorrektur). Können Sie und der Kunde davon ausgehen, dass Sie das Programm in die geforderten Fehlerschranken weisen können, wenn Sie nur genügend Testphasen mit anschließender Korrektur durchführen? Begründen Sie ihre Vermutung. Betrachten Sie dabei die Fälle

a) $f_1=800,\ f_2=400,\ f_3=200,\ f_4=100,\ f_5=50$, (2 Punkte)

b) $f_1=768,\ f_2=576,\ f_3=432,\ f_4=324,\ f_5=243$, (2 Punkte)

c) $f_1=500,\ f_2=300,\ f_3=200,\ f_4=150,\ f_5=125$. (2 Punkte)

5	a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k}$, falls er existiert.	(2 Punkte)
	b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, falls er existiert.	(2 Punkte)
	c) Untersuchen Sie mit Hilfe von Teil b) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ auf Konvergenz.	(2 Punkte)
	d) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ auf Konvergenz.	(2 Punkte)
	e) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ auf Konvergenz.	(2 Punkte)
6	Wo liegen/liegt der Fehler? Begründen Sie die korrekten Umformungen und begründen Sie, was bei den falschen Umformungen übersehen wurde. $$0 \overset{\text{G1}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(1-1) \overset{\text{G2}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \overset{\text{G3}}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \overset{\text{G4}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1+1) \overset{\text{G5}}{=} 1$$	(5 Punkte)