LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 20. Oktober 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 1

Abgabe bis Montag, 30. Oktober 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1	Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage die Verneinung der ersten ist. (Hinweis: Die Bedeutungen der Hauptwörter sind für die Bearbeitung der Aufgabe nicht relevant.)	
	Jeder Squib ist ein Muggel. – Nicht jeder Squib ist ein Muggel.	◯ Ja / ◯ Nein
	Nicht jeder Muggel ist ein Squib. – Es gibt keinen Muggel, der kein Squib ist.	◯ Ja / ◯ Nein
2	Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage eine formale Folgerung aus der ersten ist (d. h. ob die zweite Aussage unabhängig von der Bedeutung der Hauptwörter aus der ersten Aussage folgt).	
	Filch ist ein Muggel und ein Squib. – Filch ist ein Muggel oder ein Squib.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es gibt einen Squib, der ein Muggel ist. – Es gibt höchstens einen Squib, der ein Muggel ist.	◯ Ja / ◯ Nein
3	Entscheiden Sie jeweils, ob die erste und zweite Aussage formal äquivalent sind (d. h. ob die zweite Aussage unabhängig von der Bedeutung der Hauptwörter aus der ersten Aussage folgt und umgekehrt).	
	Filch ist ein Muggel oder ein Squib. – Filch ist nicht zugleich Muggel und Squib.	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist jeder Squib ein Muggel, so ist Filch ein Muggel. – Ist Filch kein Muggel, so gibt es einen Squib, der kein Muggel ist.	◯ Ja / ◯ Nein
4	Es sei K eine Menge mit Verknüpfungen „+“ und „·“ (d. h. je zwei Elementen $a,b \in K$ werde die Summe $a+b \in K$ und das Produkt $a \cdot b \in K$ zugeordnet) und L eine Teilmenge von K, für die gelte, dass aus $a,b \in L$ auch $a+b \in L$ und $a \cdot b \in L$ folgt. Wir betrachten nun auch L mit den Verknüpfungen „+“ und „·“.	
	Gilt das Körperaxiom A9 in L, so gilt es auch in K.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A3 in K, so gilt es auch in L.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A1 in L, so gilt es auch in K.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A7 in K, so gilt es auch in L.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A5 in L, so gilt es auch in K.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A2 in K, so gilt es auch in L.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A4 in K, so gilt es auch in L.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A6 in L, so gilt es auch in K.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt das Körperaxiom A8 in L, so gilt es auch in K.	◯ wahr / ◯ falsch

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Montag, den 23.10.2006, 13:45 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen.

5 Die Gleichung $(x-a)^2+y^2=1$ beschreibt einen Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(a,0)$ in der x-y-Ebene ($a,x,y \in \mathbb{R}$).

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob sich die Kreise mit Radius 1 um $(0,0)$ beziehungsweise $(\frac{6}{5},0)$ schneiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls den x-Wert der Schnittpunkte.

Lösungsversuch: Es gilt

$$\begin{aligned}
& (x-0)^2+y^2=1 \text{ und } (x-\tfrac{6}{5})^2+y^2=1 \\
\Rightarrow\ & x^2+y^2=(x-\tfrac{6}{5})^2+y^2 \\
\Rightarrow\ & x^2=(x-\tfrac{6}{5})^2 \\
\Rightarrow\ & x^2=x^2-\tfrac{12}{5}x+\tfrac{36}{25} \\
\Rightarrow\ & 0=-\tfrac{12}{5}x+\tfrac{36}{25} \\
\Rightarrow\ & \tfrac{12}{5}x=\tfrac{36}{25} \\
\Rightarrow\ & x=\tfrac{3}{5},
\end{aligned}$$

also schneiden sich die gegebenen Kreise, und der x-Wert der Schnittpunkte ist $\frac{3}{5}$.

a) Der „Beweis“ funktioniert genauso, falls andere Mittelpunkte der Form $(a,0)$ betrachtet werden. Wählen Sie anstelle von $(\frac{6}{5},0)$ einen anderen Mittelpunkt, so dass der „Beweis“ hier eine falsche Aussage liefert. Begründen Sie sowohl geometrisch-anschaulich als auch mathematisch-formal, weshalb die „gezeigte“ Aussage falsch ist. (3 Punkte)

b) Welche Aussage wird durch die Folgerungskette im Lösungsversuch tatsächlich bewiesen? (2 Punkte)

c) Ergänzen Sie den Lösungsversuch zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe. (2 Punkte)

6 Beweisen Sie ausschließlich durch Benutzung der Körperaxiome A1 bis A9 und Ergebnisse früherer Aufgabenteile sowie durch elementare logische Überlegungen:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$. (Hinweis: Beginnen Sie mit $0 \cdot x \overset{\text{A3}}{=} (0+0) \cdot x$.) (2 Punkte)

b) Für $x,y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$ (2 Punkte)

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(-1)x = -x$. (2 Punkte)

Verwenden Sie in jedem Umformungsschritt höchstens ein Axiom an höchstens einer Stelle und geben Sie es explizit an. (**Hinweis:** Schreiben Sie die auftretenden Ausdrücke vollständig geklammert auf.) In dem Fall, dass eine Gleichheit zu zeigen ist, schreiben Sie Ihre Lösung so auf, dass Sie mit einer Seite der zu zeigenden Gleichheit beginnen und diese Schritt für Schritt so umformen, dass zwischen allen Ausdrücken ein Gleichheitszeichen steht und am Ende die andere Seite der zu zeigenden Gleichheit erreicht ist.

7	Sei $M = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$. a) Zeigen Sie, dass M nicht beschränkt ist, indem Sie für alle $N > 0$ (diese Notation impliziert $N \in \mathbb{R}$, sofern nicht explizit etwas anderes gegeben ist) ein $x \in M$ angeben mit $\lvert x \rvert \geq N$. (2 Punkte) b) Ist M nach unten bzw. oben beschränkt? (2 Punkte) c) Bestimmen Sie, falls existent, $\sup M$, $\max M$, $\inf M$ und $\min M$. (3 Punkte) **Hinweis:** Die Formulierung „Bestimmen Sie" verlangt immer eine Begründung der (Nicht-) Existenz des gesuchten Objekts.