LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 3. November 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 3

Abgabe bis Montag, 13. November 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1 **Definition:** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* ∞, falls für alle $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \geq M$.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, falls für alle $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt $a_n \leq M$.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent*, falls sie bestimmt divergent gegen ∞ oder gegen $-\infty$ ist.

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen korrekt sind.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $-\infty$, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $-\infty$, so ist $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞ und $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so kann $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sein.	◯ korrekt / ◯ nicht korrekt

2 Geben Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert ein, falls er existiert. Ist die Folge bestimmt divergent gegen ∞, so gebe man **oo** ein. Ist die Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$, so gebe man **-oo** ein. Ist die Folge nicht konvergent und nicht bestimmt divergent, so gebe man **-** ein. Bitte geben Sie keine zusätzlichen Leerzeichen ein. Beachten Sie auch die Konventionen auf der Homepage.

$a_n = \frac{n^2+1}{23n+43}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.	________________
$a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.	________________
$a_n = n^2 + n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.	________________

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 10.11.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

3 Zeigen Sie
Lemma 1.8

(1) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (2 Punkte)

(2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (2 Punkte)

---

4 Beweisen Sie die folgenden Aussagen von Satz 2.2 der Vorlesung mithilfe der der Definition 2.3:
Satz 2.2 Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a$. (3 Punkte)

b) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$. (4 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgabe keine Ergebnisse verwenden, die erst nach Definition 2.3 vorgestellt werden.

---

5 Zeigen Sie mithilfe der Definition 2.3, dass die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{5n^2}{n^2+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert. (4 Punkte)
Hinweis: Sie dürfen für die Bearbeitung dieser Aufgabe keine Ergebnisse verwenden, die erst nach Definition 2.3 vorgestellt werden.

---

6 Bestimmen Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k > l$. Dann sei $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^k}\right)^{(n^l)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis) das Sandwich-Lemma (siehe unten) und die Bernoullische Ungleichung. (4 Punkte)

b) $x_n = \sqrt{9n^2 + 23n + 47} - 3n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen:
Korollar: Sei (c_n) eine reelle Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{c_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} c_n}.$$

(3 Punkte)

Bemerkung: Auch in den folgenden Übungen dürfen Sie das folgende Lemma benutzen.
Lemma (Sandwich-Lemma)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit

(i) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$.

Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

7	Eine Datenbank muss häufig neu sortiert werden, als Erfahrungswerte erhält man für die beiden Sortieralgorithmen in etwa den Aufwand in Abhängigkeit von der Zahl n der zu sortierenden Einträge: • Bubblesort: $b_n := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1+3k)$ und • Insertsort: $i_n := \sum_{k=1}^{n}(2+2k)$ Welches der beiden Verfahren ist für sehr große Datenbanken zu empfehlen? Berechnen Sie dazu den Grenzwert der Folge $(b_n/i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und interpretieren Sie das Ergebnis. (3 Punkte)