LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 11. Januar 2007

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 9

Abgabe bis Montag, 15. Januar 2007, 09:45 Uhr

Das gesamte Analysis für Informatiker Team wünscht Ihnen ein gesegnetes und frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.

Bemerkung: Dieses Blatt enthält einige zusätzliche Aufgaben, die nicht zu der zu erreichenden Gesamtpunktzahl beitragen. Alle von Ihnen erreichten Punkte erhöhen andererseits Ihren Punktestand. Konkret zählen zu der Gesamtpunktzahl (von der Sie ein Drittel erreichen müssen) von diesem Blatt die unter reguläre Punkte angegebenen Punkte.

	Reguläre Punkte	Zusätzliche (freiwillige) Punkte
Multiple Choice	8	16
schriftliche Aufgaben	24	13

Nutzen Sie die Chance ihren Punktestand aufzubessern und die Vorlesung zu wiederholen.

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1	Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P(n)$ eine mathematische Aussage. Folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ aus der Gültigkeit von $P(n)$ die Gültigkeit von $P(n+1)$, so ist die Aussage $P(n+1)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\lvert x\rvert \geq \lvert x+y\rvert - \lvert y\rvert$.	◯ wahr / ◯ falsch
	Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $(1+x)^n \geq 1+nx$.	◯ wahr / ◯ falsch
2	Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?	
	Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent: • $A = \mathring{A}$, • Für alle $x \in A$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A$, • $\complement A$ ist abgeschlossen.	◯ wahr / ◯ falsch
	Für alle Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $\complement(A \cap B) = \complement A \cap \complement B$.	◯ wahr / ◯ falsch
3	Kreuzen Sie, an, was dazugehört: **Achtung:** *Entfernen Sie bitte das Häkchen vor dem -, wenn Sie die entsprechende Aufgabe beantworten!*	

	Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Welche Aussagen sind äquivalent dazu, dass A abgeschlossen ist? a) Sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Elemente $a_n \in A$ und ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so folgt $a \in A$. b) Jede Folge, deren Elemente allesamt in A liegen, besitzt eine in A konvergente Teilfolge, d.h. eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in A liegt. c) A ist beschränkt und kompakt. d) Das Komplement $\complement A$ von A ist offen und unbeschränkt.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
	Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn a) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass b) zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ c) für alle n mit $n \geq N$ gilt $\lvert a - a_n\rvert < \varepsilon$. d) gilt $\lvert a - a_n\rvert < \varepsilon$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
	Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Kreuzen Sie alle (für sich genommen) für die Konvergenz hinreichenden Bedingungen an. **Vorsicht!** a) Zu jedem $N \in \mathbb{N}$, jedem $\varepsilon > 0$ und für alle $n, m \geq N$ gilt: $\lvert a_m - a_n\rvert < \varepsilon$, b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $\lvert a_m - a_n\rvert < \varepsilon$, c) Zu jedem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $\lvert a_m - a_n\rvert < \varepsilon$, d) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $n, m \geq N$ gilt: $\lvert a_m - a_n\rvert < \frac{1}{N}$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
	Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt: a) Falls $b \neq 0$ ist gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ gilt $b_n \neq 0$ und es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. b) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{sgn} a_k = \operatorname{sgn} a$, c) Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n < b_n$ gilt, so folgt $a < b$. d) Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n < b_n$ gilt, so folgt $a \leq b$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d

	Welche der folgenden Folgen konvergiert gegen $e = \exp(1)$? Mehrfachnennungen sind möglich. **(Übrigens können Sie jeden der Grenzwerte berechnen)** a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$. b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$. c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$. d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ a) ist absolut konvergent, b) ist bedingt konvergiert c) ist divergent, d) ist bestimmt divergent gegen ∞.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
4	Die folgenden Regeln werden immer wieder von Studierenden in Klausuren und Hausaufgaben verwendet. Kreuzen Sie die wahren Aussagen darunter an. **Achtung:** *Entfernen Sie bitte das Häkchen vor dem -, wenn Sie die entsprechende Aufgabe beantworten!*	
	(1) Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ kürzt man $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$, (2) Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ und $b+c \neq 0$ kürzt man $\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$, (3) Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ ist $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, (4) Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ ist $a^{b+c} = a^b + a^c$, (5) Für alle $a,b > 0$ ist $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, (6) Für alle $a,b > 0$ ist $\ln(a+b) = \ln(a)\ln(b)$, (7) Für alle $a > b > 0$ ist $\ln(a-b) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$, (8) Für alle $a,b > 0$ ist $\ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$, (9) Es ist $\ln(0) = 1$, (10) Für alle $a > b > 0$, ist $\frac{-1}{a} > \frac{-1}{b}$, (11) Für alle $a,b > 0$ ist $\ln(a^b) = b\ln a$, (12) Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ ist $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$, (13) Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ ist $\sin(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, (14) Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ ist $\exp(ab) = \exp(a)\exp(b)$.	☐ 1 / ☐ 2 / ☐ 3 / ☐ 4 / ☐ 5 / ☐ 6 / ☐ 7 / ☐ 8 / ☐ 9 / ☐ 10 / ☐ 11 / ☐ 12 / ☐ 13 / ☐ 14
5	Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	

	Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar, so ist auch $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto f(\lvert x\rvert)$ differenzierbar.	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f gleichmäßig stetig.	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar, und gilt $f'(0)=0$, so hat f in 0 ein lokales Extremum.	◯ wahr / ◯ falsch
	Gilt $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=a\in\mathbb{R}$, so ist f differenzierbar in x_0 mit Ableitung a.	◯ wahr / ◯ falsch
6	Sei $D\subset\mathbb{R}$ und seien $f_n, g_n: D\to\mathbb{R}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ Funktionen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Konvergieren die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in D, so konvergiert auch $(f_n\cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in D.	◯ wahr / ◯ falsch
	Sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Konvergiert die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in D, so konvergiert auch $(\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in D.	◯ wahr / ◯ falsch
	Konvergieren die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf D, so konvergiert auch $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf D.	◯ wahr / ◯ falsch
7	Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Die Menge $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n!},\dfrac{1}{n!}\right)$ ist offen	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist A offen, so ist $\mathbb{R}\setminus A$ abgeschlossen und umgekehrt.	◯ wahr / ◯ falsch
	Jeder Punkt einer abgeschlossenen Menge A ist Häufungspunkt von A.	◯ wahr / ◯ falsch
8	Beantworten Sie die folgende Frage:	
	Was ist das Maximum der Menge $\{2-\frac{(-1)^n}{n}; n\in\mathbb{N}\}$? (Falls nicht existent, gebe man ein Minuszeichen ein.)	__________
9	Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?	
	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a)<f(b)$. Dann gilt $$[f(a),f(b)]\subset f([a,b]).$$	◯ wahr / ◯ falsch

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis **Freitag, den 12.01.2007**, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

10

a) Es sei $a<b$. Folgern Sie aus dem Mittelwertsatz, dass jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die differenzierbar auf (a,b) ist mit $f'(x)>0$, für alle $x\in(a,b)$ streng monoton wachsend ist. (3 Punkte)

b) Geben Sie umgekehrt ein Beispiel einer streng monoton wachsenden, auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) differenzierbaren Funktion g an, deren Ableitung g' nicht überall >0 ist, d.h. für die es ein $x\in[a,b]$ gibt mit $g'(x)\leq 0$. Zeigen Sie auch, dass Ihre Funktion die genannten Eigenschaften besitzt. (1 Punkt)

11	**Kurvendiskussion** a) Untersuchen Sie die Funktion $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto -3x^4+8x^3+6x^2-24x-e$$ auf Extrema. (4 Punkte) b) Untersuchen Sie die Funktion $$f:[-1,1)\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto \frac{x^2+1}{2x-7}$$ auf Extrema. (4 Punkte) **Bemerkung:** Soll man eine Funktion auf Extrema untersuchen, so muss man in der Antwort alle **lokalen Extrema** bestimmen, sie als lokale **Maxima** und **Minima** einordnen und zeigen, ob es sich jeweils um **globale Extremstellen** handelt oder nicht. **Tipp:** Vergessen Sie nicht auf lokale Extrema auf dem Rand zu achten und, falls der Definitionsbereich unbeschränkt ist, das Verhalten für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$ zu betrachten.
12	a) Untersuchen Sie die Funktion $$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x}+x^2+1}{2x+1}, & \text{falls } x\le 1\\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x>1\end{cases}$$ auf gleichmäßige Stetigkeit. (Hinweis: Sie können sich die Rechnung vereinfachen, indem Sie Satz 3.8 verwenden.) (4 Punkte) b) Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie: Der Wertebereich $f((a,b))$ ist beschränkt. (Hinweis: Führen Sie die Annahme, $f((a,b))$ sei unbeschränkt, zu einem Widerspruch zur gleichmäßigen Stetigkeit.) (4 Punkte)
13	Die Funktionen $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) und $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Kosinus hyperbolicus) sind für $x\in\mathbb{R}$ definiert durch $$\sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad\text{und}\quad \cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$ Zeigen Sie a) Die Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von sinh ist differenzierbar. Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{Arsinh}(x)$. (3 Punkte) b) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $$\operatorname{Arsinh}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$ (3 Punkte) **Hinweis:** Satz 4.3 und Satz 4.7 gelten entsprechend auch für unendliche Intervalle. Sie dürfen natürlich die Ergebnisse des letzten Blattes zu sinh und cosh verwenden.

14	Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls existent: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}}}{x^3}$. (3 Punkte) b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sinh(x)} - \dfrac{1}{x} \right)$. (3 Punkte) **(Mit l'Hôspital)**
15	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die sich in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius ∞ entwickeln läßt und $c \in \mathbb{R}$. Die Ableitung f' von f erfülle für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $$f'(x) = cf(x).$$ Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von c und $a_0 = f(0)$, die Koeffizienten der Potenzreihe von f und bestimmen Sie die Funktion f (nicht als Potenzreihe). (5 Punkte) **Hinweis:** Stellen Sie rekursive Gleichungen für die Koeffizienten auf und schließen sie mit vollständiger Induktion auf einen geschlossenen Term für die Koeffizienten. **Bemerkung 1:** Es ist nicht entscheidend, dass hier $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ steht und dass der Konvergenzradius ∞ ist, die Aufgabe würde für Konvergenzradius $M > 0$ und $f : (-M, M) \to \mathbb{R}$ das selbe Ergebnis liefern. **Bemerkung 2:** Gleichungen der Art $f'(x) = F(f(x), x)$ heißen gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bemerkung zu den Klausuren: Für die Klausur sind keine Hilfsmittel außer dokumentenechten Stiften (kein Bleistift, keine roten oder grünen Stifte, keine Buntstifte zum Schreiben!) zugelassen. Thema der Klausur sind die Aussagen der Vorlesung, nicht Aussagen aus den Übungen. Wir stellen noch eine Liste von verwendbaren Aussagen zusammen, die sie in der Klausur benutzen dürfen (und die nicht in der Vorlesung benutzt wurden). Zum zitieren von Sätzen, Definition o.ä. der Vorlesung ein paar Beispiele:

- Nach Definition der Stetigkeit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass ...

- f und g sind stetig in x. Dann ist nach Vorlesung auch $f \cdot g$ stetig und ..., Sie brauchen also nicht Satz 3.4 oder gar Satz 3.4 (3) zu lernen. Diese Nummern werden in den vorgerechneten Hausaufgaben gerne genannt, um Ihnen ein Nachvollziehen der Aufgaben zu erleichtern. Eine Ausnahme bilden Sätze (Lemmata, Korollare, ...) mit Eigennamen (Kettenregel, Maximum-Minimum Satz (von Weierstraß), Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz (bitte nicht verwechseln), Chauchy-Kriterium bzw. Konvergenzkriterium von Cauchy, usw.

- Nach Vorlesung sind Polynome stetig, also ...

- Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und $|a_k| > \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist nach dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent.

  Sie müssen bei Aussagen mit Namen also diese Namen (Minorantenkriterium, ...) angeben.

- Sie dürfen eindeutige Abkürzungen verwenden, etwa VL für Vorlesung (nach VL ist exp stetig und dffb. mit $\exp' = \exp$), GWS für Grenzwertsätze, $\triangle \neq$ oder $\triangle$-Ungleichung für Dreiecksungleichung, abg. für abgeschlossen, mon. wachsend, HP für Häufungspunkt, ste. für stetig, IA für Induktionsanfang, IS für Induktionsschritt und IV für die Induktionsvoraussetzung.)

- Vergessen Sie nicht, die Voraussetzungen zu überprüfen und das hin zu schreiben, seien sie noch so trivial oder offensichtlich. Darauf gibt es Punkte. Angenommen, sie hätten eben die Stetigkeit von f gezeigt, dann können sie etwa schreiben: Da f stetig ist auf $[0,1]$ und $f(0) = 0 < \pi < f(1) = 2\pi$ gilt, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,1)$ mit $f(x) = \pi$.