LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 4. Dezember 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 7

Abgabe bis Montag, 11. Dezember 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1	Genügt die gegebene Reihe dem Leibnizkriterium, das heißt, gibt es eine monoton fallende Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass sich die Reihe als $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ schreiben lässt?	
	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1+\frac{1}{k})^k$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})^k$	◯ ja / ◯ nein
	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^k$	◯ ja / ◯ nein
2	Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?	
	Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf D definierten Funktionen. Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.	◯ wahr / ◯ falsch
	Die geometrische Reihe für $\lvert x\rvert < 1$ konvergiert nicht absolut.	◯ wahr / ◯ falsch
	Ist die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so existieren $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.	◯ wahr / ◯ falsch
3	Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?	
	Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.	◯ wahr / ◯ falsch

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 08.12.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

4	a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kx)^2}{\exp(kx)}?$$ (3 Punkte) b) Zeigen Sie die Konvergenz der Funktionenreihe $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+x}{\exp(k+x)}.$$ (2 Punkte) c) Es seien drei konvergente Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben mit Grenzwerten $\lim_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{k\to\infty} b_k = b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{k\to\infty} c_k = c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert ist $$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a_k x^2 + b_k x + c_k.$$ Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen der Form $[-M,M]$, mit $M > 0$, konvergiert und folgern Sie daraus ihre punktweise Konvergenz gegen den Grenzwert $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ax^2 + bx + c.$$ (4 Punkte) **Hinweis:** Sie können zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k > K$ gilt: $$\lvert a_k - a\rvert < \frac{\varepsilon}{3 \cdot M^2}, \quad \lvert b_k - b\rvert < \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} \text{ und } \lvert c_k - c\rvert < \frac{\varepsilon}{3}.$$ Daraus können Sie die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge auf $[-M,M]$ schließen.
5	a) Gegeben sei eine Folge positiver reeller Zahlen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n} z^n$$ den Konvergenzradius r hat. (3 Punkte) b) Man berechne als Anwendung von Teil a) den Konvergenzradius der folgenden Reihen: $$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{n})} z^n$$ (3 Punkte)
6	Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Beweisen Sie Ihre Antworten. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} x^n$, (2 Punkte) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-e)^n$. (2 Punkte)

7	Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n^2}$. (3 Punkte) **Hinweis:** Die Kriterien für Potenzreihen könnten hier Probleme machen. Aber jede Potenzreihe ist auch eine Reihe. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} (z+2)^n$. (3 Punkte)