LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
S. Mayer

Aachen, den 11. Dezember 2006

Analysis für Informatiker, Übungsblatt 8

Abgabe bis Montag, 18. Dezember 2006, 09:45 Uhr

Bearbeiten Sie die folgenden Multiple Choice Fragen gründlich und raten Sie nicht einfach nur. Es kommt auch auf Details der Formulierung an. Falsche Antworten werden mit einem Minuspunkte bewertet.

1 Geben Sie jeweils die Ableitung von f in 0 an. Falls diese nicht existiert (also auch, wenn der Differenzenquotient gegen ∞ oder $-\infty$ geht), geben Sie bitte ein Minuszeichen ein.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{x}{2+3x^2}$	____________
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x\cdot\lvert x\rvert$	____________
$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sqrt{1-x}$	____________
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} x\log\lvert x\rvert, & \text{falls } x\neq 0\\ 0, & \text{falls } x=0\end{cases}$	____________
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sqrt{x^2}$	____________
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x<0\\ x^2, & \text{falls } x\geq 0\end{cases}$	____________

2 In den folgenden Aufgaben haben Sie für die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beantworten, ob diese Folgen eine oder mehrere der folgenden Aussagen erfüllen:

a Die Funktionenfolge ist punktweise konvergent auf ihrem Definitionsbereich D.

b Die Funktionenfolge ist gleichmäßig konvergent in ihrem Definitionsbereich D.

c Die Funktionenfolge ist nicht punktweise konvergent auf ihrem Definitionsbereich D.

d Die Funktionenfolge ist nicht gleichmäßig konvergent in ihrem Definitionsbereich D.

Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{2n}$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d
Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\sin(nx)$.	☐ a / ☐ b / ☐ c / ☐ d

Die nachfolgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Übungsgruppe versehen werden und sind bis Freitag, den 15.12.2006, 11:30 Uhr in den Abgabekasten im Hauptgebäude vor Raum 102 einzuwerfen. Der weiter oben genannt Abgabetermin gilt für die Multiple Choice Fragen.

Termine: Das ist das letzte Aufgabenblatt, dass vor Weihnachten abzugeben ist. Blatt 9 wird bis zum 12. Januar abzugeben sein. Am 22. Januar wird in der Aula I, zur Zeit der Übung, voraussichtlich die Probeklausur stattfinden. Seien Sie bitte nach Möglichkeit pünktlich. Die Lösung von Blatt 10 wird dann komplett im Netz veröffentlicht und nicht besprochen.

3	Zeigen Sie: a) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Abbildungen mit $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ und $\lim_{y\to\infty} g(y)=L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, so ist $$L=\lim_{y\to\infty} g(y)=\lim_{x\to\infty} g(f(x)).$$ Sie brauchen nur den Fall $L\in\{-\infty,\infty\}$ zu zeigen. (1 Punkt) b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$ und $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (3 Punkte) **Hinweis:** Schreiben Sie $\sqrt[n]{n}$ mit Hilfe der allgemeinen Potenz. c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\cdot 2^k\cdot x^k\right)$. (2 Punkte)
Bemerkung: Zur Differentiation und dem Differenzenquotienten gibt im Internet auf der Vorlesungsseite unter „Sonstige Materialien“ oder direkt unter `http://www.matha.rwth-aachen.de/ mayer/Analysis/Differentiation_Sinus.html` einen Versuch der Veranschaulichung. Bilden Sie den Grenzwert (von Hand) $\delta\to 0$ und vergleichen Sie die entstehende Kurven.	
4	a) Sei $D\subset\mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von D. Weiter sei $f_1:D\to\mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f_2:D\to\mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $f_1(x_0)=f_2(x_0)=0$. Zeigen Sie: Die Funktion $f_1\cdot f_2$ hat in x_0 die Ableitung 0. (2 Punkte) b) Sei $$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1, & \text{falls } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{falls } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2g(x)$. Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit in 0. (2 Punkte) c) Berechnen Sie die Ableitung von $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^x$. (2 Punkte)
5	Es sei $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x\neq 0\\ 0, & \text{für } x=0\end{cases}$$ gegeben. a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. (3 Punkte) b) Zeigen Sie, dass f **nicht** zweimal differenzierbar ist in 0. (4 Punkte)

6 **Kosinus Hyperbolicus** und **Sinus Hyperbolicus**.
Wir definieren die Reihen

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

und

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Zeigen Sie

a) Die Reihen cosh und sinh konvergieren absolut. (2 Punkte)

b) Es ist $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. (3 Punkte)

c) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. (1 Punkt)