Differentialgleichungen und Numerik

SS 2001

Musterlösungen vom Lehrstuhl

http://www.igpm.rwth-aachen.de/jvor/teaching/diffnum01.html

Aufgabe 1

a) Die triviale Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$ erhält man durch Trennung der Variablen $y(t) = \left(\frac{t-c}{3}\right)^3$, $c \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-c_1}{3}\right)^3 ; & t < c_1 \\ 0 ; & c_1 \leq t \leq c_2 \\ \left(\frac{t-c_2}{3}\right)^3 ; & c_2 < t \end{cases} \qquad (*)$$

Für $y(1) = 0$ gibt es unendlich viele (lokale) Lösungen vom Typ $(*)$ mit $c_1 \leq 1 \leq c_2$.

b) Wenn $y(1) = 1$, dann ist y auf (c_2, ∞) eindeutig bestimmt

$$y(t) = \left(\frac{t-c_2}{3}\right)^3, \quad c_2 < t,$$

wobei

$$1 = \left(\frac{1-c_2}{3}\right)^3 \Rightarrow c_2 = -2,$$

aber das AWP hat auch unendlich viele Lösungen vom Typ

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-c_1}{3}\right)^3 ; & t < c_1 \\ 0 ; & c_1 \leq t \leq -2 \\ \left(\frac{t+2}{3}\right)^3 ; & -2 < t \end{cases}$$

c) Der Grund ist, daß die rechte Seite $y^{2/3}$ lokal (und zwar in $y = 0$) eine nicht Lipschitz-stetige Funktion ist.

I. A. wird sowohl die Eindeutigkeit, als auch die Existenz der maximalen Lösung nur für lokal Lipschitz-stetige Funktionen garantiert.

Aufgabe 2 (DGL mit getrennten Veränderlichen)

a) Setze $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto e^y$. Dann sind

f, g stetig, $g(y) \neq 0 \; \forall y \in \mathbb{R}$. Setze

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{1+u^2} \, du = \arctan(u) \Big|_1^t = \arctan(t) - \arctan(1)$$

$$G(y) = \int_1^y e^{-u} \, du = -e^{-u} \Big|_1^y = -e^{-y} + e^{-1}$$

Damit ist das AWP auf ~~R~~ I eindeutig lösbar durch $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. d.

$y(t) := G^{-1} \circ F(t)$.

Berechnen von G^{-1} (formal):

[$y = -e^{-y} + \frac{1}{e}$

$x = -e^{-y} + \frac{1}{e} \Rightarrow +e^{-y} = -x + \frac{1}{e}$

~~$\Rightarrow e^{-y} =$~~

$\Rightarrow -y = \log\left(-x + \frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow y = -\log\left(-x + \frac{1}{e}\right) = \log\left(\frac{1}{-x + \frac{1}{e}}\right)$]

Also ist $G^{-1}(t) = \log\left(\frac{1}{-t + \frac{1}{e}}\right)$, und damit

$$y: I \to \mathbb{R}, \quad y(t) = \log\left(\frac{1}{-\arctan(t) + \arctan(1) + \frac{1}{e}}\right)$$

Bestimmung von I: dazu: $-\arctan(t) + \underbrace{\arctan(1) + \frac{1}{e}}_{=: c} > 0$

$\Rightarrow \quad -\arctan(t) > -c$

$\Rightarrow \quad \arctan(t) < +c$

$\Rightarrow \quad t < \tan(c)$

$\Rightarrow \quad I = (-\infty, \tan(c))$

b) Setze $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ und $g: (0,1) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y(1-y)$. Dann sind f, g stetig, $0 = t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$ und $g(y) \neq 0$ $\forall y \in (0,1)$. Dann ist

$$F(t) = \int_0^t du = t$$

$$G(y) = \int_{1/2}^{y} \frac{du}{u(1-u)} = \int_{1/2}^{y} \frac{du}{u} + \int_{1/2}^{y} \frac{du}{(1-u)} = \log|u| \Big|_{1/2}^{y} + \left(-\log|1-u|\right)\Big|_{1/2}^{y}$$

$$= \log(y) - \log(\tfrac{1}{2}) - \log(1-y) + \log(\tfrac{1}{2}) \quad , y \in (0,1)$$

$$= \log\left(\frac{y}{1-y}\right),$$

also gilt $G((0,1)) = \mathbb{R}$.

Damit ist das AWP auf $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar durch $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. d. $y(t) := G^{-1} \circ F(t)$.

Es gilt:

$$G^{-1}(t) = \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)}$$

Damit ist $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t) := \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)}$ eindeutige Lösung.

c) Setze $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(t) := \cos(t)$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) := \exp(y)$. Dann sind f, g stetig und $g(y) \neq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Ferner

$$F(t) = \int_0^t \cos(u)\, du = \sin(t),$$

$$G(t) = \int_{-1}^{y} \exp(-u)\, du = e - \exp(-y)$$

Dann ist $G(\mathbb{R}) = (-\infty, e)$. Wähle $D := \mathbb{R}$, dann ist $F(D) = [-1,1] \subset G(\mathbb{R})$ mit $0 = t_0 \in D$, also gibt es eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}$ mit

$$G(y) = e - \exp(-y) \iff y = -\log(e - G(y))$$

$$\Rightarrow G^{-1}(t) = -\log(e-t)$$

Dann ist $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. d. $t \mapsto G^{-1} \circ F(t) = -\log(e - \sin(t))$ eindeutige Lösung.

d) Für $t \neq 0$ ist $y' = \frac{y}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$. Setze $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\varphi(x) := x + \sqrt{1+x^2}$,

dann $y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right)$. Dann ist $y(t) = t \cdot x(t)$, wobei $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ =>

$y'(t) = x(t) + t\, x'(t)$, $t \mapsto x(t)$

Betrachte also neues Problem:

$y'(t) = t \cdot x'(t) = \varphi(x)$, $x(1) = \frac{y(1)}{1} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}\left(\varphi(x)t + x(t)\right) = \frac{1}{t}\sqrt{1 + x(t)^2} \qquad (*)$$

Setze $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$ und

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$

Dann sind f, g stetig und $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ferner

$$F(t) = \int_1^t \frac{du}{u} = \log|t| \quad \text{und}$$

$$G(x) = \int_{3/4}^{x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsinh}(x) - \operatorname{arcsinh}\left(\tfrac{3}{4}\right),$$

also $G(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Setze $D := \mathbb{R}_+$, so $F(D) \supset \mathbb{R} = G(\mathbb{R})$, also hat $(*)$ eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+$, nämlich $\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\tilde{x}(t) = G^{-1} \circ F(t)$. Es ist

$\sinh\left(G(x) + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{3}{4}\right)\right) = x$, also

$$G^{-1}(t) = \sinh\left(t + \operatorname{arcsinh}\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}(t) = \sinh\left(\log|t| + \operatorname{arcsinh}\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)$$

Rücksubstitution: $y(t) = t \cdot x(t)$

Dann $y: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $y(t) = t \cdot \sinh\left(\log|t| + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ ist gesuchte Lösung.

Aufgabe 3 (Lineare DGL 1. Ordnung)

a) (i) homogener Fall

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,du \qquad \Big| \; x' = \underbrace{2t}_{a(t)} x + \underbrace{3t}_{b(t)}$$

$$= \int_{0}^{t} 2u\,du$$

$$= t^2$$

=> homogene Lösungsgesamtheit:

$$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = c\exp(t^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-A(u)) \cdot b(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{t} \exp(-u^2) \cdot 3u\,du$$

$$= 3\int_{0}^{t} u \cdot \exp(-u^2)\,du$$

$$= -\frac{3}{2}\exp(-t^2) + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_p(t) = c(t) \cdot \exp(A(t)) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\exp(t^2)$$

(iii) Lösungsgesamtheit

$$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = -\frac{3}{2} + \tilde{c} \cdot \exp(t^2), \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

b) $x'(t) = \underbrace{-\tan(t)}_{a(t)} x + \underbrace{\tan(t)}_{b(t)}$

(i) homogener Fall

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{t} -\tan(u)\,du$$

$$= \log(\cos(t)) \quad , \ t \in I$$

$\Rightarrow$ homogene Lösungsgesamtheit

$$x : I \to \mathbb{R} \ , \quad x(t) = c \cdot \exp(A(t)) = c \cos(t) \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-A(u)) \cdot b(u) \, du$$

$$= \int_0^t \frac{\tan(u)}{\cos(u)} \, du$$

$$= - \int_0^t \frac{-\sin(u)}{\cos(u)^2} \, du$$

$$= - \left[- \frac{1}{\cos(u)} \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{\cos(t)} - 1$$

$$\Rightarrow x_p : I \to \mathbb{R} \ , \quad x_p(t) = c(t) \cdot \exp(A(t)) = \left(\frac{1}{\cos(t)} - 1 \right) \cdot \cos(t) = 1 - \cos(t)$$

(iii) Lösungsgesamtheit

$$x : I \to \mathbb{R} \ , \quad x(t) = 1 - \cos(t) + c \cdot \cos(t) \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= 1 + \tilde{c} \cos(t) \ , \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

c) $x'(t) = \underbrace{2\left(\frac{1}{t} - t\right)}_{a(t)} x \underbrace{- t \exp(-t^2)}_{b(t)}$

(i) homogener Fall

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u) \, du$$

$$= 2 \int_1^t \left(\frac{1}{u} - u \right) du$$

$$= 2 \left(\log(t) - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \right) \quad , \ t \in I$$

$\Rightarrow$ homogene Lösungsgesamtheit

$$x : I \to \mathbb{R} \ , \quad x(t) = c \cdot \exp(A(t)) = \tilde{c} \, t^2 \exp(-t^2) \quad , c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

(ii) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left(-A(u)\right) \cdot b(u)\, du$$

$$= \int_{1}^{t} \exp\left(-2\left(\log(u) - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot (-u) \cdot \exp(-u^2)\, du$$

$$= \frac{1}{e} \int_{1}^{t} \left(-\frac{1}{u}\right) du$$

$$= -\frac{1}{e} \left[\log(u)\right]_1^t$$

$$= -\frac{1}{e} \log t \quad , \quad t \in I$$

$$\Rightarrow x_p : I \to \mathbb{R} , \quad x_p(t) = c(t) \cdot \exp(A(t))$$

$$= -t^2 \log(t) \cdot \exp(-t^2)$$

(iii) Lösungsgesamtheit

$$x : I \to \mathbb{R} , \quad x(t) = -t^2 \log(t) \cdot \exp(-t^2) + \tilde{c}\, t^2 \exp(-t^2) \quad , \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4 (Bernoulli-DGL)

a) $x' = \underbrace{(-1)}_{a(t)} x + \underbrace{1}_{b(t)} \cdot x^2$

(i) Substitution

$u := x^{1-2} = x^{-1}$, also $x = u^{-1} \Rightarrow x' = -\frac{u'}{u^2}$

$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}$

$\Rightarrow \quad u' = u - 1$

(ii) Löse $x' = \underbrace{1}_{a(t)} \cdot x \underbrace{- 1}_{b(t)}$

a) homogener Fall

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\, du$$
$$= \int_0^t du$$
$$= t$$

$\Rightarrow$ homogene Lösungsgesamtheit

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = c \cdot \exp(t) \quad , c \in \mathbb{R}$

b) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-A(u)) \cdot b(u)\, du$$
$$= -\int_0^t \exp(-u)\, du = \exp(-t) - 1$$

$\Rightarrow x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_p(t) = c(t) \cdot \exp(A(t)) = 1 - \exp(t)$

c) Lösungsgesamtheit

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = 1 - \exp(t) + c \cdot \exp(t) \quad , c \in \mathbb{R}$

$= 1 + \tilde{c} \exp(t) \quad , \tilde{c} \in \mathbb{R}$

(iii) Rücksubstitution

$x : I \to \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{1 + \tilde{c} \exp(t)}$, I geeignet zu wählen, s.u.

(iv) Anfangsbedingung

$$x(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\tilde{c}} \Rightarrow \tilde{c} = 1$$

(v) Lösungsmenge

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{1+\exp(t)}$$

b) $x' = \underbrace{\left(\frac{1}{t} - t\right)}_{a(t)} x \underbrace{- t\exp(-t^2)}_{b(t)} x^{-1}$

(i) Substitution

$$u := x^{1+1} = x^2, \text{ also } x = \sqrt{u} \Rightarrow x' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \left(\frac{1}{t} - t\right)\sqrt{u} - \frac{1}{2} t \exp(-t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow u' = 2\left(\frac{1}{t} - t\right) u - t\exp(-t^2)$$

(ii) Löse $x' = \underbrace{2\left(\frac{1}{t} - t\right)}_{a(t)} x \underbrace{- t\exp(-t^2)}_{b(t)}$

(siehe Aufgabe 3c)

Lösungsgesamtheit:

$$x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x(t) = t^2 \left(c - \log|t|\right) \exp(-t^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

(iii) Rücksubstitution

$$x : I \to \mathbb{R}, \quad x = \sqrt{u} = t\sqrt{c - \log|t|} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

(iv) Anfangsbedingung

$$x(1) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{c}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{c} = 1 \Rightarrow c = +1.$$

(v) Lösungsmenge

$$x : I \to \mathbb{R}, \quad x(t) = t\sqrt{1 - \log|t|} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad I = (0, e)$$

Aufgabe 5 (Riccati-DGL)

a) (i) partikuläre Lösung

Ansatz: $x = a + bt$, $a, b \in \mathbb{R}$ (s. Hinweis)

$\Rightarrow x' = b$

$\Rightarrow b = t^2 + t + 1 - 2at - 2bt^2 - a - bt + a^2 + 2abt + b^2t^2$

$\Rightarrow 0 = (\dots)$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Monome t, t^2 erhält man nach einigem Rechnen: $b = 1$, $a = 0$, damit $x_p(t) = t$, $x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) Substitution

$u := x - t \Rightarrow x = u + t \Rightarrow x' = u' + 1$

$\Rightarrow u' + 1 = t^2 + t + 1 - (2t+1)(u+t) + (u+t^2)$

$\Rightarrow u' = -u + u^2$

(iii) Lösung von $u' = -u + u^2$ (siehe Aufgabe 4a))

a) $u(t) = \dfrac{1}{1 + c\exp(t)}$, $c \in \mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$, I geeignet zu wählen (s.u.)

b) Anfangsbedingungen

$x(t) = u(t) + t = \dfrac{1}{1 + c\exp(t)} + t$

$x(0) = 2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\exp(t)} + t$, $t \in I$

c) Lösungsmenge

$x : I \to \mathbb{R}$, $x(t) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\exp(t)} + t$, $I = (-\infty, \log(2))$

b) (i) partikuläre Lösung

Ansatz: $x(t) = a + bt + ct^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x'(t) = b + 2ct$

$\Rightarrow \quad b + 2ct = (\dots)$

$\Rightarrow \quad 0 = (\dots)$

$= t^6 \tilde{a} + \dots + t\tilde{g} + \tilde{f} \quad , \quad \tilde{a}, \dots, \tilde{f} \in \mathbb{R}$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Monome $(1, \dots, t^6)$ erhält man aus

$0 = t^6(-1 + 2c - c^2)$

$\wedge \; 0 = t^5(-2 + 2b + 2c - 2bc)$

$\wedge \; 0 = t^4(-1 + 2a + 2b - b^2 - 2ac)$

$\wedge \; 0 = t^3(2a - 2ab)$

$\wedge \; 0 = t(-2c + 3 - b)$

$\wedge \; 0 = -b + 1 - a$

$\Rightarrow a = 0, \; b = 1, \; c = 1 \quad \Rightarrow \quad x_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_p(t) = t + t^2$

(ii) Substitution

$u := x - x_p \quad \Rightarrow \quad x = u + x_p$

$= u + t + t^2$

$\Rightarrow \quad x' = u' + 2t + 1$

$u' = -t^6 - 2t^5 - t^4 + t^2 t + 3t + 1 + (2t^4 + 2t^3 - 1)x - tx^2 - 2t - 1$

$= (\dots)$

$= (2t^4 + 2t^3 - 1)u - t^2u^2 + (-2t^3 - 2t^4)u$

$= -u - t^2u^2$

(iii) Lösung mit Bernoulli

$x' = -x - t^2x^2$

a) Substitution

$u := \frac{1}{x} \quad , \quad x = \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad x' = -\frac{u'}{u^2}$

$\Rightarrow \quad u' = u + t^2$

b) Löse $x' = x + t^2$

(i) homogener Fall

$A(t) = + \int^t du = t$

=> homogene Lösungsgesamtheit

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\quad x(t) = c \cdot \exp(t)\ ,\quad c \in \mathbb{R}$

(ii) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_0^t u^2 \cdot \exp(-u)\, du$$

$$= -\exp(t) \cdot (t^2 - 2t + 2) + 2 \quad = -\exp(-t) \cdot (t^2 - 2t + 2) + 2$$

=> $x_p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x_p(t) = c(t) \cdot \exp(A(t))$$

$$= -(t^2 - 2t + 2) + 2\exp(t)$$

(iii) Lösungsgesamtheit

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\quad x(t) = -(t^2 - 2t + 2) + c \cdot \exp(t)\ ,\quad c \in \mathbb{R}$

c) Lösungsmenge Bernoulli

$x: I \to \mathbb{R}\ ,\quad x(t) = \dfrac{1}{-(t^2 - 2t + 2) + c\exp(t)}$, I noch geeignet zu wählen

d) Rücksubstitution

$$x = u + x_0$$

$$= \frac{1}{-(t^2 - 2t + 2) + c\exp(t)} + t + t^2$$

e) Anfangsbedingungen

$x(0) = 1 = \dfrac{1}{-2 + c}$ => $c = 3$

f) Lösungsmenge

Setze $g(t) := -(t^2 - 2t + 2) + 3\exp(t)$. Eine Kurvendiskussion von g zeigt: g hat genau eine reelle Nullstelle, etwa g_0, und diese ist negativ.

Setze $I := (g_0, \infty)$. Damit Lösungsmenge

$$x: I \to \mathbb{R},\quad x(t) = \frac{1}{-(t^2 - 2t + 2) + 3\exp(t)} + t + t^2$$

Musterlösung zur 2. Übung

Aufgabe 1

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom:

$\chi_A(x) = \det(A - x E_2)$, E_n bezeichne Einheitsmatrix

$= (6-x)(2-x) + 4$

$= (x-4)^2$

Eigenwert

$\chi_A(x) = 0 \Rightarrow t' = 4$ (doppelter EW)

Eigenvektor

$(A - t' E_2)\, v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (1,2)^T$

Hauptvektor (2. Stufe)

$(A - t' E_2)\, v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = (1,1)^T$

Fundamentalsystem

$x_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2(t) = e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>charakteristisches Polynom</u>

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$

$= (3-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda) - 4 - 6 + 3\lambda + 2(3-\lambda) + 4(3-\lambda)$ ("Sarrus")

$\vdots$

$= -(\lambda-2)^3$

<u>Eigenwert</u>

$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 2$ (dreifacher EW)

<u>Eigenvektor</u>

$(A - \lambda_0 E_3)\, v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (1, -1, 1)^T$

<u>Hauptvektoren</u> (2, 3-Stufe)

$(A - \lambda_0 E_3)\, v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = (2, -1, 1)^T$ (HV 2. Stufe)

$(A - \lambda_0 E_3)\, v_3 = v_2 \Rightarrow v_3 = (-1, -\frac{1}{2}, 1)^T$ (HV 3. Stufe)

<u>Fundamentalsystem</u>

$x_1(t) = \cancel{\exp}\ e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$x_3(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>charakteristisches Polynom</u>

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$$
$$= -\lambda^3 - 4 + 2\lambda$$
$$\vdots$$
$$= -(\lambda+2)\left((\lambda-1)^2+1\right)$$

<u>Eigenwerte</u>

$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1+i, \quad \lambda_3 = 1-i$

<u>Eigenvektoren</u>

$\lambda_1: \ (A - \lambda_1 E_3) v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (1, -1, 1)^T$

$\lambda_2: \ (A - \lambda_2 E_3) v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = (-2i, 1-i, 1)^T$

Da es sich hier um ein homogenes lineares DGL System handelt, ist mit $x = \exp(tA)v$, $v \in \mathbb{C}^4$ auch $x_1 = \exp(tA)\,\mathrm{Re}(v)$ und $x_2 = \exp(tA)\,\mathrm{Im}(v)$ Lösung und x_1, x_2 sind l.u.

<u>(reelles) Fundamentalsystem</u>

$$x_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_2(t) = e^{(1+i)t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= e^t\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \qquad ; \ e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

$$= e^t\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right) + i\,e^t\left(\cos(t)\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow x_2(t) = e^t\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$x_3(t) = e^t\left(\sin(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \cos(t)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 2

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\dots) = \lambda^2 - 1$$

Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (A + I)v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem / Wronski-Matrix

$$FS \ \left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Lösung der homogenen Gleichung durch $W(t_0)c_0 = y_0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_H(t) = W(t) \cdot c_0 = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + e^{-t} \\ -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

$$y_p(t) = W(t)\, c(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(u)\, f(u)}_{=: c'(u)} du$$

a) Berechnen von $c'(t)$ als Lösung von $W(t)c'(t) = f(t)$:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot c'(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} \Rightarrow c'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ (t+1)e^t \end{pmatrix}$$

b) Integration

$$c(t) = \int_0^t c'(u)\,du = \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

c) Partikuläre Lösung

$$y_p(t) = W(t) \cdot c(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ t\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{t} + t \\ 1 - e^{t} + 2t \end{pmatrix}$$

<u>Lösung des AWPs</u>

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{t} + e^{-t} \\ -e^{t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - e^{t} + t \\ 1 - e^{t} + 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2e^{t} + e^{-t} + t \\ 1 - 2e^{t} + 2e^{-t} + 2t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) Ansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ char. Gleichung

$\lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$

$\Rightarrow$ (reelles) Fundamentalsystem

$\{ e^{-t}, e^{-4t} \}$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit:

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Ansatz wie oben $\rightsquigarrow$ char. Gleichung $\lambda^3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3})(\lambda + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

komplex $\{ \exp(t), \exp(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})t), \exp(-\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})t) \}$

reell $\{ \exp(t), \exp(-\frac{t}{2}) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t), \exp(-\frac{t}{2}) \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \}$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-\frac{t}{2}) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_3 \exp(-\frac{t}{2}) \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

c) Ansatz wie oben $\rightsquigarrow$ char. Gleichung

$$0 = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ (reelles) Fundamentalsystem

$$\{\underbrace{\exp(0)}_{=1}, \exp(-2t), \exp(3t)\}$$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y(t) = c_1 + c_2 \exp(-2t) + c_3 \exp(3t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4

a) homogene Lösung

Mit dem Ansatz $y(t) = \exp(\lambda t)$ erhält man als char. Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 7,$$

also $\chi_A(\lambda) = 0 \iff 0 = \lambda^2 + 2\lambda + 7 = (\lambda - (-1 + i\sqrt{6}))(\lambda - (-1 - i\sqrt{6}))$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

komplex: $\{\exp((-1 + i\sqrt{6})t), \exp((-1 - i\sqrt{6})t)\}$

reell : $\{\exp(-t)\cos(\sqrt{6}t), \exp(-t)\sin(\sqrt{6}t)\}$

inhomogene Lösung (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

$m=1, \alpha=1, b_0 = c_0 = 0, b_1 = 1, c_1 = 0, \beta = 0$

$\gamma = 1 + 0 \cdot i$ ist keine Nullstelle von χ_A

$\Rightarrow y(x) = \exp(x)(d_0 + x d_1)$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$y''(x) = \exp(x)(d_0 + 2d_1 + x d_1)$

$y'(x) = \exp(x)(d_0 + d_1 + x d_1)$

$x = 10 d_0 + 4 d_1 + x(d_1 + 2d_1 + 7d_1)$

$\Rightarrow d_1 = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow d_0 = -\frac{4}{100}$

$\Rightarrow y(x) = \exp(x)\left(-\frac{1}{25} + \frac{1}{10}x\right)$

(Probe zeigt, daß y partikuläre Lösung ist.)

Lösungsgesamtheit:

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto \exp(-t)(\lambda_1 \cos(\sqrt{6}t) + \lambda_2 \sin(\sqrt{6}t)) + \exp(t)\left(-\frac{1}{25} + \frac{1}{10}t\right),$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

b) homogene Lösung

Mit Ansatz $y = \exp(\lambda t)$ erhält man als char. Gleichung

$$0 = \chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 1 = (\lambda+1)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right)$$

$\Rightarrow$ FS

komplex $\left\{ \exp(-t),\ \exp\left(\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})t\right),\ \exp\left(\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})t\right) \right\}$

reell $\left\{ \exp(-t),\ \exp\left(\tfrac{1}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right),\ \exp\left(\tfrac{1}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) \right\}$

inhomogene Lösung (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

$\alpha = 0,\ m = 3,\ \beta = 0,\ b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1,\ c_i = 0$

$\gamma = 0$ keine Nullstelle von $\chi_A \Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow y(x) = \sum_{j=0}^{3} d_j x^j, \quad y'''(x) = 6 d_3$

$\Rightarrow y_p(x) = x^3 + 2x - 5$

Lösungsgesamtheit

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(-t) + \lambda_2 \exp\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) + \lambda_3 \exp\left(\tfrac{t}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)$$

$$+ t^3 + 2t - 5, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

c) <u>homogene Lösung</u>

Ansatz: $y(t) = \exp(\lambda t)$

$\Rightarrow \chi_q(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

komplex $\{\exp(it), \exp(-it)\}$

reell $\{\cos(t), \sin(t)\}$

<u>inhomogene Lösung</u>

<u>1. Fall</u> rechte Seite: $\cos(x) - 3\sin(x)$

$\alpha = 0, \ m = 0, \ \beta = 1, \ b_0 = 1, \ c_0 = -3$

$\mu = i$ einfache Nullstelle $\Rightarrow k = 1$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$y_{p_1}(x) = x\left(d_0 \cos(x) + e_0 \sin(x)\right)$

$y''_{p_1}(x) = (-2d_0 - x e_0)\sin(x) + (2e_0 - x d_0)\cos(x)$

$y''_{p_1}(x) + y_{p_1}(x) = -2d_0 \sin(x) + 2e_0 \cos(x)$

$= \cos(x) - 3\sin(x)$

$\Rightarrow y_{p_1}(x) = \frac{x}{2}\left(3\cos(x) + \sin(x)\right)$

<u>2. Fall</u> rechte Seite: $7x\exp(x)\sin(2x)$

$m = 1, \ \alpha = 1, \ \beta = 2, \ b_0 = b_1 = 0, \ c_0 = 0, \ c_1 = 7$

$\mu = 1 + 2i$ keine Nullstelle $\Rightarrow k = 0$

$$y_{p_2}(x) = \exp(x)\Big(d_0\cos(2x) + c_0\sin(2x) + x\big(d_1\cos(2x) + e_1\sin(2x)\big)\Big)$$

$$y''_{p_2}(x) = y_{p_2}(x) + 2\exp(x)\Big(\big(2e_0 + d_1\big)\cos(2x) + \big(-2d_0 + e_1\big)\sin(2x)$$
$$+ x\big(-2d_1\sin(2x) + 2e_1\cos(2x)\big)\Big)$$
$$+ \exp(x)\Big(-2\big(2e_0 + d_1\big)\sin(2x) + 2\big(-2d_0 + e_1\big)\cos(2x)$$
$$- 2d_1\sin(2x) + 2e_1\cos(2x)$$
$$+ x\big(-4d_1\cos(2x) - 4e_1\sin(2x)\big)\Big)$$

$$y''_{p_2}(x) - y_{p_2}(x) = \dots \overset{!}{=} 7x\exp(x)\cdot\sin(2x)$$

$$\Rightarrow e_1 = d_1 = -\frac{7}{8}, \quad d_0 = -\frac{7}{16}, \quad e_0 = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow y_{p_2}(x) = \exp(x)\Big(-\frac{7}{16}\cos(2x) + \frac{7}{8}\sin(2x) - \frac{7}{8}x\big(\cos(2x) + \sin(2x)\big)\Big)$$

<u>Lösungsgesamtheit</u>

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$t \to \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) + \frac{t}{2}\big(3\cos(t) + \sin(t)\big)$$
$$+ \exp(t)\Big(-\frac{7}{16}\cos(2t) + \frac{7}{8}\sin(2t) - \frac{7}{8}x\big(\cos(2t) + \sin(2t)\big)\Big)$$

· Aufgabe 5 (alte Klausuraufgabe)

Aufgabe 2:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y' = 3e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0, \ \ y''(0) = 0.$$

(7 Punkte)

1. Möglichkeit

Charakteristisches Polynom und Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

(reelles) Fundamentalsystem:

$$S = \{1, e^t, e^{-t}\}$$ $\boxed{1}$

Wronski-Matrix und rechte Seite des äquivalenten Systems:

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$ $\boxed{1}$

Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems (beachte $\det(W(t)) \neq 0 \quad \forall t$):

$$y_s(t) = W(t)\, c(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma \;, \quad y_s(t_0) = (0,0,0)^T$$

Berechnen von $c'(\sigma) := W^{-1}(\sigma) f(\sigma)$ als Lösung des Systems $W(\sigma)c'(\sigma) = f(\sigma)$:

LGS:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t & -e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ \hline & \dots & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3e^{2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}e^t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}e^{3t} \end{array} \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{2t} \\ \frac{3}{2}e^t \\ \frac{3}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$ $\boxed{2}$

Integration:

$$c(t) = \int_0^t c'(\sigma)\,d\sigma = \int_0^t \begin{pmatrix} -3e^{2\sigma} \\ \frac{3}{2}e^{\sigma} \\ \frac{3}{2}e^{3\sigma} \end{pmatrix} d\sigma = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ $\boxed{1}$

Berechnen der Lösung des AWP's:

$$y(t) = y_s(t) \qquad / \text{wg. Anfangsbed.})$$

$$= (c(t))^T \cdot ((1,0,0)\cdot W(t))$$

$$= (1, e^t, e^{-t}) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{2t}}}$$ $\boxed{2}$

$\Sigma\ 7$

2. Möglichkeit

Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Fundamentalsystem: $S = \{1, e^t, e^{-t}\}$ $\boxed{1}$

Bestimmung einer speziellen Lösung durch Ansatz vom Typ der rechten Seite: $y_s(t) = a\,e^{2t}$, $a \in \mathbb{R}$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{2}$, d.h. $y_s(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$. $\boxed{3}$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + \frac{1}{2}e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der ~~konst~~ Koeffizienten entsprechend den Anfangs-bedingungen

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t} + \frac{1}{2} e^{2t} \quad , \quad y(0) = 0$$

$$y'(t) = c_2 e^{t} - c_3 e^{-t} + e^{2t} \quad , \quad y'(0) = 0$$

$$y''(t) = c_2 e^{t} + c_3 e^{-t} + 2 e^{2t} \quad , \quad y''(0) = 0$$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & \dots & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = -\frac{3}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Lösung:

$$y(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{2t}$$

$\boxed{3}$

Σ 7

Musterlösung 3. Übung

Aufgabe 1

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$$

$$= (\lambda^2 + 1) = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

Eigenwerte

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i$$

Eigenvektoren

$$(A - \lambda_1 E_2) v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E_2) v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem / Wronski-Matrix

(komplex) $\left\{ e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \ e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

(reell) $\left\{ \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ -\cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Lösung der homogenen Gleichung durch $W(t_0)\, c_0 = y_0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_H(t) = W(t) \cdot c_0 = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Lösung des AWP's

y_H erfüllt die Anfangsbedingung und ist somit Lösung des AWP's:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

b) exakte Lösung: Einheitskreis

c) Explizites Euler mit Schrittweite $h = \frac{1}{4}$: $\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -y^{(0)} \\ x^{(0)} \end{pmatrix}$

Anschaulich ergibt das eine sich immer weiter öffnende Spirale.

Stützpunkte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.93 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.39 \\ 1.085 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.07 \\ 1.18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.22 \\ 1.19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.52 \\ 1.135 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.80 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1.05 \\ 0.81 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1.25 \\ 0.54 \end{pmatrix}$$

d) Implizites Euler-Verfahren

$$x^{j+1} = x^j + h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^{j+1}$$

Hier nur „kleines" System mit 2x2 Matrix, deshalb ausnahmsweise Matrix invertieren; das liefert

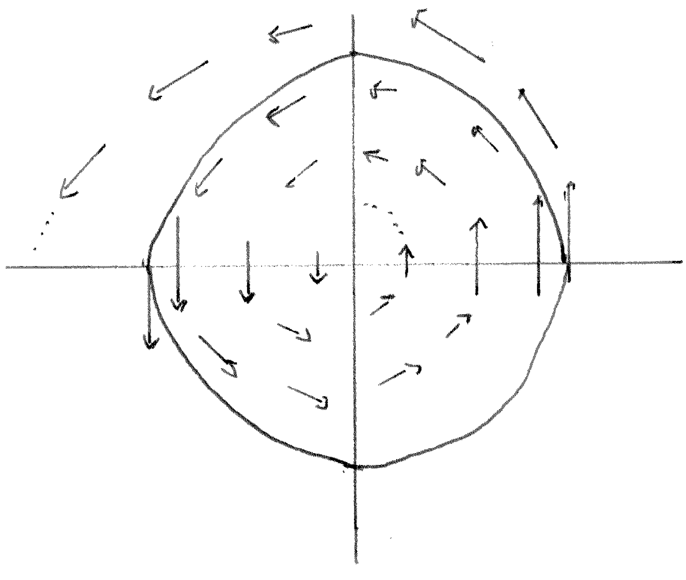
$$\frac{1}{1+h^2} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix} x^j \underset{h=\frac{1}{2}}{=} \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} x^j = x^{j+1}$$

Stützpunkte:

$$\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.64 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.18 \\ 0.61 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.39 \\ 0.42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.49 \\ 0.18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.46 \\ -0.05 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.35 \\ -0.22 \end{pmatrix}$$

Zu b), c), d) siehe auch Skizze:



Aufgabe 2

Transformation der DGL 2. Ordnung auf ein System 1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ x\, z_2(x) - z_1(x) + 3 \end{pmatrix} =: f(x, z)$$

Wende nun Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $h=1$ auf $z' = f(x,z)$, $z(0) = (3,2)^T$, an:

$$K_1 = f(0, z(0)) = f\left(0, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = f\left(\tfrac{1}{2}, z(0) + \tfrac{1}{2}K_1\right) = f\left(\tfrac{1}{2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = K_1$$

$$K_3 = K_2 = K_1$$

$$K_4 = f(1, z(0) + K_3) = f\left(1, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = K_1$$

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = z(0) + K_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Näherungslösung für das System. Aus der obigen ~~Substitution~~ Transformation erhalten wir Approximationen für die ursprüngliche DGL:

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$ ~~also~~ d.h. $y(1) \approx 5$, $y'(1) \approx 2$.

Aufgabe 3

Transformation der DGL 3. Ordnung auf ein System 1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ x^2 z_3(x) + x z_2(x) - 4 z_1(x) + 4 \end{pmatrix}}_{=: f(x,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & x & x^2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beachte: Die Trapezregel ist ein implizites Verfahren. Es muß also in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst werden.

Die Trapezregel $z(1) = z(0) + \frac{1}{2}\left(f(0, z(0)) + f(1, z(1)) \right)$ liefert

$$\begin{pmatrix} z_1(1) \\ z_2(1) \\ z_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_2(1) \\ z_3(1) \\ z_3(1) + z_2(1) - 4 z_1(1) + 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1(1) - \frac{1}{2} z_2(1) \\ z_2(1) - \frac{1}{2} z_3(1) \\ z_3(1) - \frac{1}{2} z_3(1) - \frac{1}{2} z_2(1) + 2 z_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} z(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Lösung dieses LGS ist

$$z(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Unter Beachtung der durchgeführten Transformation erhalten wir als Näherungen zur ursprünglichen DGL:

$$y(1) \approx 2, \quad y'(1) \approx 2, \quad y''(1) \approx 2.$$

Aufgabe 4

Transformation auf ein System 1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} \quad , \quad z(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = z^{(0)}$$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_2(x) \\ 2z_1(x) - x\, z_2(x) \end{pmatrix}}_{=:\, f(x,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -x \end{pmatrix} z(x)$$

a) explizites Euler-Verfahren ($h=1$, $x_0=2$)

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(0)} \\ 2\, z_1^{(0)} - x_0 \cdot z_2^{(0)} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad y(3) \approx 9 \ , \quad y'(3) \approx 6$

b) implizites Euler-Verfahren ($h=1$, $x_0=2$, $x_1=3$)

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ 2 z_1^{(1)} - x_1 \cdot z_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

Durch Umformung erhält man das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1+x_1 \end{pmatrix} z^{(1)} = z^{(0)}$$

Mit $x_1 = 3$, $z^{(0)} = (5,4)^T$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} z^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $y(3) \approx 12$, $y'(3) \approx 7$

c) verbessertes Euler-Verfahren ($h = 1$, $x_0 = 2$)

$$K_1 = f(2, z(2)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\cdot 5 - 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= f\left(2+\tfrac{1}{2},\ z(2) + \tfrac{1}{2} K_1\right) \\ &= f\left(\tfrac{5}{2},\ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\tfrac{5}{2},\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3) &= z(2) + K_2 \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 11/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $y(3) \approx 10$, $y'(3) \approx \frac{11}{2}$

Aufgabe 5

Maple Worksheet

Funktion f:

```
> f:=(t,y)->-y/(t^(1/2)-0.5);
```

$$f := (t, y) \rightarrow -\frac{y}{\sqrt{t} - .5}$$

Expliziter Euler:

```
> for l from 1 to 10 do
> h:=2^(4-l):
> y1:=1;
> s1:=1;
> for k from 1 to 2^(l-1) do
> y2:=evalf(y1+h*f(s1,y1)):
> y1:=y2:
> s2:=s1+h:
> s1:=s2:
> od;
> printf("h=%5.5e      y(9)=%5.8f\n",h,y2);
> od:
h=8.00000e+00      y(9)=-15.00000000
h=4.00000e+00      y(9)=9.12840071
h=2.00000e+00      y(9)=-.01931006
h=1.00000e+00      y(9)=.00037060
h=5.00000e-01      y(9)=0.00000000
h=2.50000e-01      y(9)=.00126980
h=1.25000e-01      y(9)=.00232831
h=6.25000e-02      y(9)=.00296179
h=3.12500e-02      y(9)=.00330406
h=1.56250e-02      y(9)=.00348151
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
>
```

Nach den ersten unbrauchbaren Schritten konvergiert das Verfahren langsam von unten gegen den gesuchten Wert. Die ersten drei Dezimalstellen sind bei $h = \frac{1}{64}$ schon richtig bestimmt.

Impliziter Euler:

```
> for k from 1 to 10 do
> y1:=1;
> s1:=1;
> h:=2^(4-k);
> for l from 1 to 2^(k-1) do
> s2:=s1+h;
> y3:=solve(ys2=y1+h*f(s2,ys2),ys2);      (*)
> evalf(y3):
> y1:=y3:
> s1:=s2:
> od;
> printf("h=%5.5e      y(9)=%5.8f\n",h,y3);
> od:
h=8.00000e+00      y(9)=.23809524
h=4.00000e+00      y(9)=.11640700
h=2.00000e+00      y(9)=.05093379
h=1.00000e+00      y(9)=.02260984
h=5.00000e-01      y(9)=.01150846
h=2.50000e-01      y(9)=.00711456
h=1.25000e-01      y(9)=.00526319
h=6.25000e-02      y(9)=.00443082
h=3.12500e-02      y(9)=.00403878
h=1.56250e-02      y(9)=.00384889
>
>
```

(*) Entweder benutzt man hier den Maple Befehl "solve" oder man löst die Gleichung von Hand:

$$y_{j+1} = y_j + h\, f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$= y_j + h \frac{y_{j+1}}{\sqrt{t_{j+1}} - \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{j+1} = \frac{y_j}{1 - \frac{1}{\sqrt{t_{j+1}} - \frac{1}{2}}\, h}$$

Das Verfahren konvergiert von oben, allerdings noch langsamer als das explizite Verfahren, liefert aber bei größeren Schrittweiten schon „brauchbarere" Ergebnisse.

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:

```
> for l from 1 to 10 do
> h:=2^(4-l):
> y1:=1:
> s1:=1:
> for k from 1 to 2^(l-1) do
> k1:=f(s1,y1):
> k2:=f(s1+h/2,y1+h/2*k1):
> k3:=f(s1+h/2,y1+h/2*k2):
> k4:=f(s1+h,y1+h*k3):
> y2:=evalf(y1+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)):
> y1:=y2:
> s2:=s1+h:
> s1:=s2:
> od;
> printf("h=%5.5e       y(9)=%5.8f\n",h,y2);
> od:
h=8.00000e+00       y(9)=24.33819341
h=4.00000e+00       y(9)=1.05516823
h=2.00000e+00       y(9)=.02265211
h=1.00000e+00       y(9)=.00431051
h=5.00000e-01       y(9)=.00369095
h=2.50000e-01       y(9)=.00366449
h=1.25000e-01       y(9)=.00366320
h=6.25000e-02       y(9)=.00366313
h=3.12500e-02       y(9)=.00366313
h=1.56250e-02       y(9)=.00366313
>
```

Nach den ersten Schritten merkt man den Resultaten die höhere Konsistenzordnung an, bei $h = \frac{1}{64}$ sind schon die ersten 7 Dezimalstellen richtig bestimmt.

4. Übung - Musterlösung

Aufgabe 1

a) Funktionswerte

x	-1	0	1	4	5
$f(x)$	-3.63	1	-1.28	-9.4	48.41

Da f stetig ist, existieren nach Zwischenwertsatz mindestens drei Nullstellen, davon sind mindestens zwei positiv und in $[0,1]$, $[4,5]$.

Weiter sind f', f'' stetig mit $f''(x) = e^x - 8$. f'' hat also genau eine Nullstelle. Damit hat f' maximal zwei Nullstellen, dann hat f maximal drei Nullstellen.

Insgesamt hat f genau zwei positive Nullstellen.

b) Definiere $F(x) := \frac{1}{2} e^{x/2}$. Zeige: F hat genau einen Fixpunkt in $[0,1]$ (dann hat f in $[0,1]$ genau eine Nullstelle). Dazu: Wir zeigen, daß F die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt => Beh.

Überprüfe Vor. des Banach'schen Fixpunktsatzes:

(i) Vollständigkeit (klar)

(ii) Selbstabbildung (klar, wg. Injektivität von F auf $[0,1]$)

(iii) Banach-Kontraktion folgt aus Mittelwertsatz:

· Seien $0 \leq x < y \leq 1$, dann $[x,y]$ kompakt und $F|_{[x,y]}$ stetig. Damit gilt

$$|F(x) - F(y)| \leq \sup_{\xi \in (x,y)} |F'(\xi)| \cdot |x-y|$$

$$\leq \frac{1}{4}\sqrt{e} \cdot |x-y|$$

$$< \underbrace{\frac{1}{2}}_{=: L < 1} \cdot |x-y|$$

Die angegebene Iteration ist gerade die Fixpunktiteration zu F.

A-priori-Fehlerabschätzung:

Berechne dazu erste Iterierte: $x_1 = \frac{1}{2} e^{x_0/2} = \frac{1}{2} e^{0.5 \cdot 0.5} \approx 0.64201271$

Sei $\bar{x}$ der Fixpunkt von F (in $[0,1]$), dann:

$$10^{-5} < |x_n - \bar{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow \qquad n = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{-5}(1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\log L} \right\rceil$$

$$= 15$$

Es sind also (höchstens) $n = 15$ Iterationen erforderlich. Berechnung der Werte mit Maple:

```
[ > restart;
[ >
[ > x0:=.5:
[ > printf("x0=%10.8f\n",x0);
  x0= .50000000
[ >
[ > for l from 1 to 15 do
  > xl:= .5 * exp(.5*x0);
  > x0:=xl: printf("x%g=%10.8f\n",l,xl);
  > od:
  x1       = .64201271
  x2       = .68925717
  x3       = .70573279
  x4       = .71157050
  x5       = .71365050
  x6       = .71439308
  x7       = .71465838
  x8       = .71475319
  x9       = .71478707
  x10       = .71479918
  x11       = .71480351
  x12       = .71480505
  x13       = .71480561
  x14       = .71480580
  x15       = .71480587
[ >
```

A-posteriori Fehlerabschätzung:

$x_{16} = 0.71480590$

$$|x_{15} - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-L} |x_{16} - x_{15}| \approx 5.4 \cdot 10^{-8}$$

c) Für $F(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$ ist $F'(x) = \frac{1}{4} e^{x/2}$ monoton steigend, insb. für $x \geq 3$. Dann $1 < F'(3) \leq F'(x) \quad \forall x \geq 3$, also F keine Kontraktion für $I := [3, \infty)$.

Alternative Lösung: Aus $f(x) = 0 \iff e^x - 4x^2 = 0 \iff \log(4x^2) = x$.
Definiere $G(x) := \log(4x^2)$, dann G monoton wachsend auf I und $G'(x) = \frac{2}{x}$ monoton fallend. Dann $3 < G(x) \quad \forall x \in I$, d.h. G ist Selbstabbildung. Ferner $\sup_{\xi \geq 3} |G'(\xi)| = G'(3) = \frac{2}{3} < 1$, also G Banach-Kontraktion und I vollständig. Dann existiert in $[3, \infty)$ genau ein Fixpunkt $\bar{\bar{x}}$ von G, und dieser ist zweite (positive) Nullstelle von f.

Fixpunktiteration: $x_0 = 3$

$$x_{n+1} := \log(4 x_n^2) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Berechnung von Näherungswerten mit Maple:

```
> restart;
> y0:=3.0:
> printf("y0=%10.8f\n",y0);
y0=3.00000000
>
> for l from 1 to 13 do
  yl:= log(4.0*y0*y0);
  y0:=yl: printf("y%g=%10.8f\n",l,yl);
  od:

y1       =3.58351894
y2       =3.93898488
y3       =4.12814045
y4       =4.22194847
y5       =4.26688785
y6       =4.28806380
y7       =4.29796497
y8       =4.30257766
y9       =4.30472296
y10       =4.30571993
y11       =4.30618307
y12       =4.30639819
y13       =4.30649810
>
```

$y_{14} = 4.30654450$

A-posteriori Fehlerabschätzung:

$$|y_{13} - \bar{\bar{x}}| \leq \frac{1}{1-\frac{2}{3}} |y_{14} - y_{13}|$$

$$= 1.4 \cdot 10^{-4}$$

Die a-priori Fehlerabschätzung liefert für eine Genauigkeit um $1.4 \cdot 10^{-4}$:

(höchstens) $n = 24$ Iterationen.

Aufgabe 2

~~**Aufgabe 1:**~~
Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+1)(y-1) &= 1, \\ x^2 + 2xy &= 2, \end{aligned}$$

besitzt genau eine reelle Lösung.

Berechnen Sie eine Näherung $(x^1, y^1)^T$ zu dieser Lösung, indem Sie ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0)^T = (0,1)^T$ einen Schritt des gedämpften Newton–Verfahrens durchführen. Für den Abbruchtest $\|F(x^1, y^1)\| < \|F(x^0, y^0)\|$ benutzen Sie die Euklidische Norm.

(6 Punkte)

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+1)(y-1) - 1 \\ x^2 + 2xy - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \\ x^2 + 2xy - 2 \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ 2x + 2y & 2x \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

1. Schritt Newton-Verfahren mit $(x^0, y^0)^T = (0,1)^T$:

$$F(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad F'(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|F(0,1)\|_2^2 = 5$$

LGS:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad s = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

Newton-Korrektur mit Dämpfung:

<u>i=0:</u> $$(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\|F(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1)\|_2^2 = 26 > 5 \qquad \boxed{1}$$

$\underline{i=1:}$ $\quad (\tilde{\tilde{x}}^1, \tilde{\tilde{y}}^1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$$F(\tilde{\tilde{x}}^1, \tilde{\tilde{y}}^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\|F(\tilde{\tilde{x}}^1, \tilde{\tilde{y}}^1)\|_2^2 = \frac{1}{8} < 5$$ $\boxed{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{(x^1, y^1)^T = \left(\frac{1}{2}, 2\right)^T}}$ $\boxed{1}$

$\sum 6$

Aufgabe 3

~~**Aufgabe 5:**~~
Gegeben sei

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a & a & -a & -a \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4a & 4 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung der Matrix M_a *ohne* Pivotisierung. Geben Sie auch an, für welche a sich diese Zerlegung durchführen läßt.

b) Für welche a verschwindet die Determinante von M_a?

c) Sei nun $a = 2$. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems $M_2 x = b$ mit $b = (1, 2, 3, 4)^T$.

(3+2+2 Punkte)

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|} 2a & a & -a & -a \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4a & 4 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\frac{2}{a}\right),\ a \neq 0 \qquad \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|} 2a & a & -a & -a \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4-2a & 3a & 1+2a \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\frac{4-2a}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|} 2a & a & -a & -a \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4+5a & \frac{9}{2}a-4 \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\frac{4-5a}{-4+5a}\right),\ a \neq \frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|} 2a & a & -a & -a \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4+5a & \frac{9}{2}a-4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a-4 \end{array}\right)$$

LR-Zerlegung von M_a ohne Pivotisierung läßt sich durchführen für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{4}{5}\}$.

1

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{a} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\frac{1}{2}a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_a = \begin{pmatrix} 2a & a & -a & -a \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4+5a & \frac{9}{2}a-4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a-4 \end{pmatrix}$$ $\boxed{2}$

b) $\det(M_a) = \det(L_a) \cdot \det(R_a)$

$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}a-4\right)(-4+5a) \cdot 4 \cdot 2a$

$\det(M_a) = 0 \iff a \in \{0, \frac{4}{5}, -8\}$ $\boxed{2}$

c) Beachte: für $a=2$ ist $M_2 x = b$ eindeutig lösbar

Berechnen der Lösung durch Vor/Rückwärtseinsetzen:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$M_2 x = b \iff$ ~~$M_2 R_2 x$~~ $L_2 \underbrace{R_2 x}_{y} = b$

$L_2 y = b \implies y = (1, 1, 1, 5)^T$

$R_2 x = y \implies \underline{\underline{x = (0, \frac{1}{2}, 1, -1)^T}}$ $\boxed{2}$

$\Sigma\ 7$

Aufgabe 4

a) Die Matrix A ist nicht positiv definit, denn $e_3^T \cdot A \cdot e_3 = -4 < 0$.

B dagegen ist positiv definit (folgt aus Aufgabenteil b)).

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spd, so bestimmt man Zerlegung $A = LDL^T$ mittels Cholesky-Verfahren (s. Großübung und Aufgabenblatt):

$$a_{11} = \tilde{\ell}_{11} = d_{11}$$

$$\tilde{\ell}_{i,k} = a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\ell}_{ij} \, \ell_{k,j} \quad , \quad i = 1, \dots, n \, , \quad k = 1, \dots, i-1$$

$$\ell_{i,j} = \frac{\tilde{\ell}_{i,j}}{d_{j,j}} \quad , \quad j = 1, \dots, i-1$$

$$\tilde{\ell}_{i,i} = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\ell}_{i,j} \, \ell_{i,j} \quad , \quad d_{ii} = \tilde{\ell}_{i,i}$$

Berechne damit Faktorisierung von B:

$\underline{i=1}$ $\quad \tilde{\ell}_{11} = b_{11} = d_{11} = 4$

$\underline{i=2}$ $\quad \tilde{\ell}_{21} = b_{21} = -2 \, , \quad \ell_{21} = \frac{\tilde{\ell}_{21}}{d_{11}} = -\frac{1}{2}$

$$\tilde{\ell}_{22} = b_{22} - \tilde{\ell}_{21} \ell_{21} = 2 - (-2)(-\tfrac{1}{2}) = 1 = d_{22}$$

$\underline{i=3}$ $\quad \tilde{\ell}_{31} = b_{31} = 4 \, , \quad \ell_{31} = \frac{\tilde{\ell}_{31}}{d_{11}} = \frac{4}{4} = 1$

$$\tilde{\ell}_{32} = b_{32} - \tilde{\ell}_{31} \ell_{21} = -2 - 4 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = 0 \, , \quad \ell_{32} = \frac{\tilde{\ell}_{32}}{d_{22}} = 0$$

$$\tilde{\ell}_{33} = b_{33} - \tilde{\ell}_{31} \ell_{31} - \tilde{\ell}_{32} \ell_{32} = 13 - 4 = 9 = d_{33}$$

$\underline{i=4}$ $\quad \tilde{\ell}_{41} = b_{41} = -6 \, , \quad \ell_{41} = \frac{\tilde{\ell}_{41}}{d_{11}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$$\tilde{\ell}_{42} = b_{42} - \tilde{\ell}_{41} \ell_{21} = 5 - (-6) \cdot (-\tfrac{1}{2}) = 2 \, , \quad \ell_{42} = \frac{\tilde{\ell}_{42}}{d_{22}} = 2$$

$$\tilde{\ell}_{43} = b_{43} - \tilde{\ell}_{41} \ell_{31} - \tilde{\ell}_{42} \ell_{32} = -18 - (-6) = -12, \qquad \ell_{43} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

$$\tilde{\ell}_{44} = b_{44} - \tilde{\ell}_{41} \ell_{41} - \tilde{\ell}_{42} \ell_{42} - \tilde{\ell}_{43} \ell_{43} = (\dots) = 4 = d_{44}$$

$\Rightarrow$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Die Lösung des Gleichungssystems $Bx = b$ reduziert sich auf

$$Ly = b, \quad DL^T x = y, \quad \text{d.h.} \quad L^T x = D^{-1} y.$$

$$Ly = b \Rightarrow y = (2, 0, -3, 0)^T$$

$$L^T x = D^{-1} y \Rightarrow x = \left(\frac{5}{6}, 0, -\frac{1}{3}, 0\right)^T$$

Aufgabe 5

a) Durch Einsetzen der Näherungen in $y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)=0$ erhält man $N-1$ Gleichungen:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\alpha(x_i)\,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+\beta(x_i)\,y(x_i)+\gamma(x_i)=0, \qquad i=1,\dots,N-1$$

und daraus

$$-\left(\frac{\alpha(x_i)}{2h}+\frac{1}{h^2}\right)y_{i+1}-\left(\beta(x_i)-\frac{2}{h^2}\right)y_i-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\alpha(x_i)}{2h}\right)y_{i-1}=\gamma(x_i), \dots, \quad i=1,\dots,N-1$$

b) Mit $y_0=y_a=y(a)$ und $y_N=y_b=y(b)$ erhält man als Systemmatrix eine Tridiagonalmatrix

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
\left(-\beta(x_1)+\frac{2}{h^2}\right) & \left(-\frac{\alpha(x_1)}{2h}-\frac{1}{h^2}\right) & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& \left(-\frac{\alpha(x_i)}{2h}-\frac{1}{h^2}\right) & \left(-\beta(x_i)+\frac{2}{h^2}\right) & \left(-\frac{\alpha(x_i)}{2h}-\frac{1}{h^2}\right) & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & \ddots & \ddots \\
& & & \left(-\frac{\alpha(x_{N-1})}{2h}-\frac{1}{h^2}\right) & \left(-\beta(x_{N-1})+\frac{2}{h^2}\right)
\end{pmatrix}$$

Da y_0 und y_N bekannt sind, sieht die rechte Seite wie folgt aus:

$$\left(\gamma(x_1)+y_0\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\alpha(x_1)}{2h}\right),\dots,\ \gamma(x_i),\dots,\ \gamma(x_{N-1})+y_N\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\alpha(x_{N-1})}{2h}\right)\right)^T,$$

wobei $x_i=a+ih$ und $h=\dfrac{b-a}{N}$, $i=1,\dots,N-1$ ist.

c) Falls $a \equiv 0$ und $b \equiv 0$, dann lautet die Systemmatrix

$$M_N = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$$

Für M_N kann man direkt eine LDL^T-Zerlegung angeben (Beweis: Induktion):

$$L_N = (l_{ij})_N, \qquad l_{i,j} = \begin{cases} 1 \; ; & i = j, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \frac{1}{i} - 1 \; ; & j = i-1, \quad i = 2, \dots, N-1, \\ 0 \; ; & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$D_N = \frac{1}{h^2} \operatorname{diag}(d_{i,i})_N, \quad d_{ii} = 1 + \frac{1}{i}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

5. Übung - Musterlösung

Aufgabe 1

Die Matrix A erfüllt das (starke) Zeilensummenkriterium. Daher konvergieren Einzel- und Gesamtschrittverfahren.

a) Gesamtschrittverfahren

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{4}\left(5 - 2x_2^k - x_3^k\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left(4 - 2x_1^k - 2x_3^k\right), \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(7 - x_1^k - 2x_2^k\right),$$

Mit $x^0 = (1,1,1)^T$ ergibt sich

$$x_1^1 = \frac{1}{4}(5-2-1) = \frac{1}{2}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{5}(4-2-2) = 0$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6}(7-1-2) = \frac{2}{3}$$

und

$$x_1^2 = \frac{1}{4}\left(5 - 2\cdot 0 - 1\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{12} = 1.08333$$

$$x_2^2 = \frac{1}{5}\left(4 - 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} = 0.33333$$

$$x_3^2 = \frac{1}{6}\left(7 - 1\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 0\right) = \frac{13}{12} = 1.08333$$

b) Einzelschrittverfahren

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{4}\left(5 - 2x_2^k - x_3^k\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left(4 - 2x_1^{k+1} - 2x_3^k\right), \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(7 - x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}\right),$$

Mit $x^0 = (1,1,1)^T$ ergibt sich

$$x_1^1 = \frac{1}{4}\left(5 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{5}\left(4 - 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1\right) = \frac{1}{5}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6}\left(7 - 1\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{5}\right) = \frac{61}{60}$$

und

$$x_1^2 = \frac{1}{4}\left(5 - 2\cdot\frac{1}{5} - 1\cdot\frac{61}{60}\right) = \frac{43}{48} = 0.89583$$

$$x_2^2 = \frac{1}{5}\left(4 - 2\cdot\frac{43}{48} - 2\cdot\frac{61}{60}\right) = \frac{7}{200} = 0.03500$$

$$x_3^2 = \frac{1}{6}\left(7 - 1\cdot\frac{43}{48} - 2\cdot\frac{7}{200}\right) = \frac{7241}{7200} = 1.00569$$

Aufgabe 2

a) $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x)$, $\quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{j=0}^{3} f(x_j)\, \ell_{j3}(x) \\
&= (-3)\cdot \frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2}\,\frac{x-4}{0-4} \\
&\quad + 1\cdot \frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-2}{1-2}\,\frac{x-4}{1-4} \\
&\quad + 2\cdot \frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-1}{2-1}\,\frac{x-4}{2-4} \\
&\quad + 7\cdot \frac{x-0}{4-0}\,\frac{x-1}{4-1}\,\frac{x-2}{4-2} \\
&= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{13}{2}x - 3
\end{aligned}
$$

b) Aus der Tabelle erhält man die Vandermonde Matrix

$$
V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = (-3, 1, 2, 7)^T.
$$

Löse das Gleichungssystem $V_3 c = b \Rightarrow c = (-3, \frac{13}{2}, -3, \frac{1}{2})^T$.

$\Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{13}{2}x - 3$

c) Berechne dividierte Differenzen durch Rekursion:

x_i	0	1	2	3
0	-3	4	$-3/2$	$1/2$
1	1	1	$1/2$	
2	2	$5/2$		
4	7			

$$\Rightarrow \quad P_3(x) = -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2)$$

d) Nehme nun den Punkt $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ hinzu.

a) $$P_4(x) = \sum_{j=0}^{4} f(x_j)\, l_{j4}(x)$$

$$= (-3)\,\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2}\,\frac{x-4}{0-4}\,\frac{x+1}{0+1}$$

$$+ 1\cdot\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-2}{1-2}\,\frac{x-4}{1-4}\,\frac{x+1}{1+1}$$

$$+ 2\cdot\frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-1}{2-1}\,\frac{x-4}{2-4}\,\frac{x+1}{2+1}$$

$$+ 7\cdot\frac{x-0}{4-0}\,\frac{x-1}{4-1}\,\frac{x-2}{4-2}\,\frac{x+1}{4+1}$$

$$+ 1\cdot\frac{x-0}{-1-0}\,\frac{x-1}{-1-1}\,\frac{x-2}{-1-2}\,\frac{x-4}{-1-4}$$

$$= \frac{7}{15}x^4 - \frac{83}{30}x^3 + \frac{53}{15}x^2 + \frac{83}{30}x - 3$$

b) Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c = \left(-3, \frac{83}{30}, \frac{53}{15}, -\frac{83}{30}, \frac{7}{15}\right)^T$$

$$\Rightarrow \quad P_4(x) = \frac{7}{15}x^4 - \frac{83}{30}x^3 + \frac{53}{15}x^2 + \frac{83}{30}x - 3$$

c) Ergänze Tabelle aus Aufgabenteil b):

x_i	0	1	2	3	4
0	-3				
		4			
1	1		-3/2		
		1		1/2	
2	2		1/2		7/15
		5/2		1/30	
4	7		13/30		
		6/5			
-1	1				

$$\Rightarrow \quad P_4(x) = -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2) + \frac{7}{15}x(x-1)(x-2)(x-4)$$

Nehme nun noch zusätzlich den Punkt $(x_5, f_5) = (3, 6)$ hinzu. Ergänze obige Tabelle

x_i	0	1	2	3	4	5
0	-3					
		4				
1	1		$-3/2$			
		1		$1/2$		
2	2		$1/2$		$7/15$	
		$5/2$		$1/30$		$-29/120$
4	7		$13/30$		$-31/120$	
		$6/5$		$-29/60$		
-1	1		$-1/20$			
		$5/4$				
3	6					

$$\Rightarrow P_5(x) = P_4(x) + \left(-\frac{29}{120}\right) x\,(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$$

$$= -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2) + \frac{7}{15}x(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$- \frac{29}{120}x(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$$

Aufgabe 3

Für den Interpolationsfehler gilt

$$|f(x) - p(f,x)| = \frac{1}{n!}\, |\omega(x)|\, |f^{(n)}(\xi)| \quad , \quad \xi \in [a,b] .$$

a) Es ist

$$f'(x) = \log(2 - \sin(x)) \quad , \quad f''(x) = \frac{-\cos(x)}{2 - \sin(x)} \; ,$$

ferner ist (s. Hinweis)

$$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \sin(x) \le 1 \\ \cos(x) \ge \cos(1) > \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

also $|f''(\xi)| > \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ für $\xi \in [0,1]$.

Mit der Abschätzung für den Interpolationsfehler erhält man

$$|f(0.85) - L_1(0.85)| = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot |(0.8 - 0.85)(0.9 - 0.85)|$$

$$> \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{3200} .$$

Also genügt die Genauigkeit der linearen Interpolation nicht.

b) Es ist

$$f'''(x) = \frac{\sin(x)(2 - \sin(x)) - \cos^2(x)}{(2 - \sin(x))^2} = \frac{2\sin(x) - 1}{(2 - \sin(x))^2}$$

und wegen $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ folgt $0 \leq \sin(x) \leq 1$ und daraus

$$|2\sin(x) - 1| \leq 1$$

und $$|2 - \sin(x)| \geq 1,$$

also $|f'''(x)| \leq 1$.

Nach der Interpolationsfehlerabschätzung

$$|f(0.85) - L_2(0.85)| = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0.15)(0.05)(0.05)$$

$$< \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{16\,000},$$

was ausreicht.