Prof. Dr. R. Mathar RWTH Aachen, SS 2000
Jaakob Kind Ausgabe: 13.04.2000

0. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

Eine Postfiliale habe N geöffnete Schalter, und es seien n Kunden anwesend, zwischen denen nicht unterschieden werden soll. Auf wieviel Arten können sich die Kunden an die Schalter anstellen, wenn sich jeder Kunde nur dann hinter einen anderen stellt, wenn kein Schalter frei ist?

Aufgabe 2

Der Schriftsteller und Glücksspieler Chevalier de Méré (1607-1684) bemerkte bei einem Würfelspiel, in dem gleichzeitig drei Würfel geworfen wurden, daß die Augensumme 11 häufiger auftrat als die Augensumme 12. De Méré überlegte sich, daß die Augensummen 11 bzw. 12 jeweils auf sechs unterschiedliche Arten erreichbar sind, nämlich durch 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 bzw. durch 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4. Daraus schloß er, daß beide Augensummen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten müßten, was seiner Beobachtung jedoch widersprach (de Mérés Paradoxon).

a) Worin besteht de Mérés Fehler?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Werfen dreier Würfel die Augensumme 11 bzw. 12 zu erhalten.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 13.04.2000
Abgabe: 20.04.2000
bis 12 Uhr

1. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1 **2 Punkte**

Ein Zufallszahlengenerator erzeugt fortlaufend Tripel (i, j, k) von Ziffern aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei alle Tripel gleich wahrscheinlich sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß unter den ersten zehn Tripeln

a) mindestens eins

b) genau vier

die Form (i, i, i) $(i \in \{0, 1, \ldots, 9\})$ hat bzw. haben.

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Aus einer Urne mit von 1 bis n $(n \in \mathbb{N})$ numerierten Kugeln werden zufällig $k \leq n$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß hierbei keine Kugeln mit benachbarten Nummern gezogen werden (d. h., es gibt kein Paar von Nummern, deren Differenz den Betrag 1 hat)?

Aufgabe 3 **4 Punkte**

In einem Teich befindet sich eine unbekannte Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Fischen. Um an eine Schätzung für n zu gelangen, geht man z. B. wie folgt vor:

Zunächst werden $s \leq n$ Fische gefangen und markiert. Die markierten Fische werden anschließend zurück in den Teich geworfen. Nach einiger Zeit werden m Fische gefangen, wobei die Fische einzeln gefangen werden und jeder Fisch, nachdem notiert worden ist, ob er markiert ist oder nicht, in den Teich zurückgeworfen wird (Ziehen mit Zurücklegen). Bei diesem Vorgehen seien k markierte Fische beobachtet worden. Nun bestimmt man n^*, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, k markierte Fische zu beobachten, maximal wird.

a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von n, s, m und k) die Wahrscheinlichkeit, daß unter m gefangenen Fischen k markiert sind.

b) Bestimmen Sie $n^* \in \mathbb{N}$, so daß die in a) bestimmte Wahrscheinlichkeit für gegebenes s, m und $0 < k < m$ maximal wird. Was erhält man für $k \in \{0, m\}$?

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 20.04.2000
Abgabe: 27.04.2000
bis 12 Uhr

2. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 4 **2 Punkte**

Es seien Ω und B nichtleere Mengen mit $B \subset \Omega$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \cap B := \{A \cap B \mid A \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra über B ist.

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Ω und I seien nichtleere Mengen und $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren über Ω.

a) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ebenfalls eine σ-Algebra über Ω ist (s. Lemma 2.8 der Vorlesung).

b) Ist $\mathfrak{B} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ stets eine σ-Algebra?

Aufgabe 6 **2 Punkte**

In der Situation aus Aufgabe 3 werden die m Fische der Stichprobe gefangen, ohne daß zwischenzeitlich Fische zurück in den Teich geworfen werden (Ziehen ohne Zurücklegen). Welche Schätzung ergibt sich nun für die Anzahl der Fische im Teich?

Aufgabe 7 **5 Punkte**

Zeigen Sie, daß es keine Funktion $P : \mathbb{P}([0,1]) \to [0,1]$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\forall 0 \le a \le b \le 1 : P([a,b]) = b - a$,
2. $\forall A \subset [0,1], x \in [0,1] : A + x \subset [0,1] \Rightarrow P(A+x) = P(A)$ (d.h., P ist translationsinvariant; dabei ist $A + x := \{a + x \mid a \in A\}$),
3. für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen gilt

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Anleitung:

a) Es sei $B := [1/3, 2/3]$. Zeigen Sie, daß die durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

auf B definierte Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) $A \subset B$ enthalte aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ genau ein Element, $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[-1/3, 1/3]$. Zeigen Sie, daß die Mengen $A_k := A + r_k$ paarweise disjunkt sind und daß

$$[2/5, 3/5] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset [0,1]$$

gilt.

c) Folgern Sie hieraus, daß es keine Funktion mit den obigen Eigenschaften gibt.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 27.04.2000
Abgabe: 04.05.2000
bis 12 Uhr

3. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 8 **2 Punkte**

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie (s. Lemma 2.11 der Vorlesung)

a) $P(A^C) = 1 - P(A)$,

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

c) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

d) $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Aufgabe 9 **2 Punkte**

r Borkenkäfer befallen zufällig n Bäume (d. h., jeder Käfer wählt unabhängig von den anderen einen Baum). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß alle Bäume befallen werden.

Aufgabe 10 **3 Punkte**

n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ seien in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ vorgegeben. Zeigen Sie, daß das Ereignis

$$E_k := \bigcup_{T \subset N : |T| = k} \left(\bigcap_{j \in T} A_j \cap \bigcap_{j \in T^C} A_j^C \right)$$

(„genau k der Ereignisse A_j treten ein“) die Wahrscheinlichkeit

$$P(E_k) = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \sum_{U \subset N : |U| = i} P\left(\bigcap_{j \in U} A_j \right)$$

hat. Dabei ist $N := \{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß für Ereignisse A und $(B_t)_{t \in T}$, $|T| = m \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)^C \right) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \left(\sum_{S \subset T : |S| = i} P\left(A \cap \bigcap_{s \in S} B_s \right) \right)$$

gilt.

Aufgabe 11 **3 Punkte**

Vor Beginn einer Theatervorstellung geben n Besucher jeweils einen Hut und einen Mantel an der Garderobe ab. Nach der Vorstellung werden zuerst die Mäntel und anschließend unabhängig davon die Hüte zufällig zurückgegeben, wobei jeder Besucher einen Hut und einen Mantel erhält.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einer der Besucher seinen Hut und seinen Mantel zurückerhält?

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der in **a)** bestimmten Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k der Besucher ihren Hut und ihren Mantel zurückerhalten?

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e.$$

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 04.05.2000
Abgabe: 11.05.2000
bis 12 Uhr

4. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 12 **3 Punkte**

Beim Morsen kommen kurze und lange Signale („Punkte“ und „Striche“ im Verhältnis 3:4 vor, d. h., die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt bzw. Strich gesendet wurde, ist 3/7 bzw. 4/7. Wir nehmen nun an, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Übertragungsfehler (d. h., es wird ein anderes Signal empfangen als gesendet) für beide Signale 1/8 beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt gesendet wurde unter der Bedingung, daß ein Punkt empfangen wurde, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Strich gesendet wurde unter der Bedingung, daß ein Strich empfangen wurde.

Aufgabe 13 **3 Punkte**

Von drei Gefangenen A, B und C werden zufällig zwei zur Hinrichtung ausgewählt, der dritte wird begnadigt. A ist neugierig und möchte etwas über sein Schicksal herausfinden, merkt aber, daß der Wärter, der weiß, wer begnadigt wird, seine Frage nicht direkt beantworten darf. Also bittet er den Wärter darum, ihm den Namen eines anderen Gefangenen (also B oder C) zu nennen, der hingerichtet wird. Der Wärter, von dem bekannt ist, daß er die Wahrheit sagt, nennt B. A ist erleichtert, da sich seiner Meinung nach die Wahrscheinlichkeit seines Überlebens von 1/3 auf 1/2 erhöht hat.

a) Wie kommt A auf diese Idee?

b) Welche Wahrscheinlichkeit muß man kennen, um zu prüfen, ob A zu Recht erleichtert ist?

c) Bestimmen Sie unter der Annahme, daß die fehlende Information bekannt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A überlebt, wenn der Wärter B genannt hat.

Aufgabe 14 **3 Punkte**

Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen, wobei die Augenzahlen der beiden Würfe stochastisch unabhängig seien. Man untersuche die folgenden Ereignisse auf paarweise und gemeinsame stochastische Unabhängigkeit:

1. Im ersten Wurf wird eine gerade Zahl geworfen,
2. im zweiten Wurf wird eine ungerade Zahl geworfen,
3. die Summe der Augenzahlen aus beiden Würfen ist 7.

Aufgabe 15 **2 Punkte**

Eine faire Münze werde unendlich oft geworfen, wobei die Ergebnisse der einzelnen Würfe gemeinsam stochastisch unabhängig seien.

a) Zeigen Sie, daß jede endliche Sequenz aus „Kopf“ und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit 1 in der Münzwurffolge auftritt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige endliche Sequenz sogar unendlich oft auftritt?

Aufgabe 16 **2 Punkte**

Aus einer Urne, in der sich zu Anfang s schwarze und eine rote Kugel befinden, wird unendlich oft eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß unendlich oft die rote Kugel gezogen wird, wenn nach dem k-ten Zug

a) eine schwarze Kugel bzw.

b) k schwarze Kugeln

zusätzlich in die Urne gelegt werden.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 11.05.2000
Abgabe: 18.05.2000
bis 12 Uhr

5. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 17 **3 Punkte**

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) X ist genau dann eine Zufallsvariable, wenn

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X > \alpha\} := \{X \in (\alpha, \infty)\} \in \mathfrak{A}$$

gilt.

b) Ist X eine Zufallsvariable, dann ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $a + bX$ eine Zufallsvariable.

c) Ist X eine Zufallsvariable, dann ist auch X^2 eine Zufallsvariable.

Hinweis zu a): Zeigen Sie, daß

$$\mathfrak{X} := \{B \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 18 **3 Punkte**

Es seien $\lambda > 0$ und $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

gilt.

Aufgabe 19 **3 Punkte**

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

a) $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$ ist eine Verteilungsfunktion (siehe Satz 3.9),

b) $P^X = P^Y \Rightarrow F_X = F_Y$ (einfache Richtung von Satz 3.10).

Aufgabe 20 **2 Punkte**

Die Dauer eines Telefongesprächs (in Sekunden) sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0{,}01$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gespräch

1. mehr als 100 Sekunden,
2. zwischen 25 und 300 Sekunden bzw.
3. weniger als 150 Sekunden

dauert.

b) Bestimmen Sie x, so daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gespräch höchstens x Sekunden dauert, $0{,}9$ bzw. $0{,}5$ beträgt.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 18.05.2000
Abgabe: 25.05.2000
bis 12 Uhr

6. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 21 **3 Punkte**

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$ heißt *gedächtnislos*, wenn es eine Menge $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$ mit $P(\mathbb{T}) = 1$ gibt, so daß

$$\forall x \in \mathbb{T} : P([x, \infty)) > 0$$

und

$$\forall x, y \in \mathbb{T} : P([x + y, \infty) \mid [x, \infty)) = P([y, \infty))$$

gilt. Bestimmen Sie alle gedächtnislosen Wahrscheinlichkeitsverteilungen

a) mit $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ bzw.

b) mit stetiger Verteilungsfunktion.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, daß die Funktionalgleichung

$$\forall x, y \geq 0 : f(x + y) = f(x)f(y)$$

nur stetige Lösungen der Form $f \equiv 0$ oder $f(x) = e^{\mu x}$ $(\mu \in \mathbb{R})$ hat.

Aufgabe 22 **2 Punkte**

Es seien X eine diskrete Zufallsvariable und G_X ihre erzeugende Funktion.

a) Zeigen Sie, daß

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

gilt.

b) Was erhält man für $G_X(0)$ und $G_X(1)$?

Hinweis: Verwenden Sie die Konvention $0^0 := 1$.

Aufgabe 23 **3 Punkte**

a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

b) Zeigen Sie, daß durch

$$P(\{i\}) = \frac{1}{i(i+1)}, \ i \in \mathbb{N},$$

eine Zähldichte gegeben ist, und bestimmen Sie die zugehörige erzeugende Funktion G.

Bemerkung: Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt *Yuleverteilung*.

Hinweis: Für $|z| \leq 1$ gilt

$$-\ln(1 - z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Aufgabe 24 **3 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wie muß $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f die Dichte eines Zufallsvektors (X,Y) ist? Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_{(X,Y)}$ sowie die Dichten und Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 25.05.2000
Abgabe: 08.06.2000
bis 12 Uhr

7. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 25 **3 Punkte**

Die Anzahl der Anrufe, die innerhalb einer Sekunde bei einer Telefonvermittlung ankommen, sei poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$. Die Anzahlen von Anrufen, die in disjunkten Zeitintervallen ankommen, seien stochastisch unabhängig.

a) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von $n \in \mathbb{N}$ Sekunden genau $k \in \mathbb{N}_0$ Anrufe eingehen, ebenfalls poissonverteilt ist (mit welchem Parameter?).

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach $n_0 \leq n$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) Sekunden genau $k_0 \in \mathbb{N}_0$ Anrufe eingegangen sind, unter der Bedingung, daß nach n Sekunden genau k Anrufe eingegangen sind?

Aufgabe 26 **2 Punkte**

Bei der Qualitätskontrolle von Speicherbausteinen hat sich herausgestellt, daß 5 % der Bausteine von Anfang an defekt sind und die restlichen eine mit Parameter $\lambda = 0,001$ exponentialverteilte Lebensdauer haben. Mit welcher Verteilungsfunktion würden Sie die Lebensdauer eines zufällig herausgegriffenen Speicherchips beschreiben? Ist die zugehörige Verteilung diskret oder absolutstetig?

Aufgabe 27 **2 Punkte**

Ist es möglich, zwei Würfel so zu verfälschen, daß beim unabhängigen Wurf der Würfel alle möglichen Augensummen $(2, \ldots, 12)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten?

Aufgabe 28 **3 Punkte**

Es werde eine zufällige Anzahl N von fairen Würfeln geworfen, wobei die Verteilung von N für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$P(N = n) = 2^{-n}$$

gegeben ist. Die Augensumme werde mit S und das Maximum der geworfenen Zahlen mit M bezeichnet. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(N = 2 \mid S = 4)$,

b) $P(S = 4 \mid N \text{ ungerade})$,

c) $P(M = m)$, $m \in \{1, \ldots, 6\}$.

Hinweis: Modellieren Sie die Ergebnisse der Würfelwürfe durch eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i ($i \in \mathbb{N}$), die stochastisch unabhängig von N sind, und zeigen Sie

$$P(S = s \mid N = n) = P(S_n = s).$$

Dabei ist S_n die Summe der Augenzahlen beim Werfen von $n \in \mathbb{N}$ Würfeln.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 08.06.2000
Abgabe: 21.06.2000
bis 12 Uhr

8. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 29 **2 Punkte**

$X_1, \dots, X_n$ seien diskrete Zufallsvariablen mit Trägern $T_1, \dots, T_n$. Beweisen Sie Lemma 4.10 der Vorlesung: $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig

$$\Leftrightarrow \forall (t_1, \dots, t_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} T_i : P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = t_i).$$

Aufgabe 30 **2 Punkte**

Bei einem Rechnernetzwerk werden die Anzahl der aktiven Benutzer und die mittlere Nutzungsdauer durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen N und T beschrieben, wobei N poissonverteilt ist mit Parameter $\lambda = 5$ und T exponentialverteilt mit Parameter $\mu = 0,01$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als 4 Benutzer aktiv sind und die mittlere Nutzungsdauer kürzer als 50 Zeiteinheiten ist.

b) Im Netzwerk entstehen keine Wartezeiten, wenn $N \leq 12$ und $NT \leq 300$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

Aufgabe 31 **4 Punkte**

Bestimmen Sie Dichten bzw. Zähldichten der folgenden Verteilungen:

a) $\Gamma(\alpha_1, \lambda) * \Gamma(\alpha_2, \lambda), \;\; \alpha_1, \alpha_2, \lambda > 0,$

b) $\mathrm{Bin}(n_1, p) * \mathrm{Bin}(n_2, P), \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1,$

c) $\mathrm{Poi}(\lambda_1) * \mathrm{Poi}(\lambda_2), \;\; \lambda_1, \lambda_2 > 0,$

d) $\mathrm{Geo}(p) * \ldots * \mathrm{Geo}(p), \; 0 < p < 1,$

e) $\overline{\mathrm{Bin}}(n_1, p) * \overline{\mathrm{Bin}}(n_2, p), \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \; 0 < p < 1.$

Hinweis: Benutzen Sie in a) ohne Beweis

$$\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Aufgabe 32 **3 Punkte**

X und Y seien Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

a)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, \; x, y \geq 0,$$

b)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{x}, \; 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Dichte von $X + Y$.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 29.06.2000
Abgabe: 06.07.2000
bis 12 Uhr

9. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 33 **2 Punkte**

Die Bearbeitungszeiten (in Stunden) anstehender Programme in einer Warteschlange werden durch stochastisch unabhängige Exp(2)-verteilte Zufallsvariablen beschrieben. Ein Server arbeitet die Programme hintereinander ohne Zeitverzug ab. Wieviel Programme dürfen zur Zeit t höchstens anstehen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß die Warteschlange 6 Stunden später abgearbeitet ist, größer als $0,95$ ist, falls in der Zwischenzeit keine neuen Jobs hinzukommen?

Aufgabe 34 **2 Punkte**

Beweisen Sie Lemma 5.11 der Vorlesung: X_1, X_2 seien stochastisch unabhängige absolut-stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_{X_1}, f_{X_2}. Es gelte $f_{X_i}(x) = 0$, falls $x \leq 0$. Dann gilt:

a) $Y = X_1 X_2$ ist absolut-stetig mit Dichte

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_{X_1}\left(\frac{y}{t}\right) f_{X_2}(t) dt \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

b) $Z = \frac{X_1}{X_2}$ ist absolut-stetig mit Dichte

$$f_Z(z) = \int_0^\infty t f_{X_1}(zt) f_{X_2}(t) dt \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z).$$

Aufgabe 35 **2 Punkte**

Zeigen Sie (siehe Satz 6.5):

a) Für diskrete Zufallsvariablen X und Y gilt $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

b) X und Y seien entweder beide diskrete oder beide absolut-stetige Zufallsvariablen. Dann gilt: $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$.

Aufgabe 36 **4 Punkte**

Bestimmen Sie – falls existent – den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X für

a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$,

b) $X \sim \overline{\mathrm{Bin}}(n, p)$,

c) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$,

d) X cauchyverteilt, d.h. f_X definiert durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, x \in \mathbb{R},$$

ist eine Dichte der Verteilung von X.

Aufgabe 37 **2 Punkte**

Es seien M und N Zufallsvariablen mit $N \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ und $M \sim \mathrm{Bin}(N, p)$, also $P^{M|N=k} = \mathrm{Bin}(k, p)$. Zeigen Sie: M und $N - M$ sind stochastisch unabhängig mit $M \sim \mathrm{Poi}(p\mu)$ und $N - M \sim \mathrm{Poi}((1 - p)\mu)$.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 06.07.2000
Abgabe: 13.07.2000
bis 12 Uhr

10. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 38 **4 Punkte**

Die tatsächliche CPU-Zeit einer Benutzersitzung an einer Workstation werde als eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 = 6.25$ [sec^2] angenommen. Wieviele unabhängige Messungen der CPU-Zeiten müssen mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 der Betrag der Differenz des arithmetischen Mittels der Meßwerte und μ kleiner als 0.1 ist? Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage

a) den zentralen Grenzwertsatz,

b) die Ungleichung von Tschebyscheff.

Aufgabe 39 **1 Punkt**

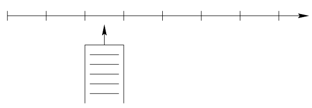
X_n sei eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen, X_n nehme mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1+n^2}$ den Wert n und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{n^2}{1+n^2}$ den Wert $-\frac{1}{n}$ an. Genügt diese Folge dem starken Gesetz großer Zahlen?

Aufgabe 40 **2 Punkte**

Sei $(X_n)_n$ eine monotone Folge von Zufallsvariablen, die stochastisch gegen die Zufallsvariable X konvergiert. Zeigen Sie, daß X_n für $n \longrightarrow \infty$ fast sicher gegen X konvergiert.

Aufgabe 41 **4 Punkte**

Auf einem Bus werde pro Zeiteinheit ein Datenpaket fester Länge übertragen. Ankommende Pakete werden in einem Puffer gespeichert. Die Zufallsvariablen X_n beschreiben die Anzahl der zu Beginn der n-ten Periode im Puffer vorhandenen Datenpakete.



Die Anzahlen A_n der in der n-ten Periode im Puffer neu ankommenden Datenpakete seien stochastisch unabhängige, jeweils Geo$(\frac{1}{1+\rho})$-verteilte Zufallsvariable, $0 \leq \rho < 1$. Die Rekursion

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_n, \; n \in \mathbb{N},$$

beschreibt die aktuelle Anzahl der Pakete im Puffer nach Periode n. Zeigen Sie: Wenn $X_n \sim \text{Geo}(1-\rho)$, so besitzen X_n und X_{n+1} dieselbe Verteilung.

Prof. Dr. R. Mathar RWTH Aachen, SS 2000
Jaakob Kind Ausgabe: 07.06.2000

1. Zusatzübung zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 1

Beim dreimaligen Wurf eines fairen Würfels bezeichne A_{ij} $(1 \leq i < j \leq 3)$ das Ereignis, daß im i-ten Wurf die gleiche Augenzahl wie im j-ten Wurf gewürfelt wird.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung dieses Zufallsexperiments an, und bestimmen Sie $P(A_{ij})$ $(1 \leq i < j \leq 3)$.

b) Zeigen Sie, daß die Ereignisse $\{A_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 3\}$ paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2

Ein Mann besitzt fünf Münzen, davon haben zwei auf beiden Seiten einen „Kopf", eine hat auf beiden Seiten eine „Zahl", und die beiden letzten haben jeweils einen „Kopf" und eine „Zahl" auf ihren Seiten.

a) Der Mann zieht mit geschlossenen Augen eine Münze und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein „Kopf" oben?

b) Der Mann öffnet die Augen und sieht, daß ein „Kopf" oben liegt. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit liegt ein „Kopf" auf der unteren Seite der Münze?

c) Der Mann schließt die Augen wieder und wirft die Münze nochmals. Wie groß ist nun die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß auf der unteren Seite ein „Kopf" liegt?

d) Er öffnet die Augen und sieht, daß ein „Kopf" oben liegt. Wie groß ist nun die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß auf der unteren Seite ein „Kopf" liegt?

Aufgabe 3

Fluggesellschaften haben festgestellt, daß Passagiere, die einen Flug reserviert haben, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $1/10$ nicht am Check-in erscheinen. Deshalb verkauft Gesellschaft A zehn Tickets für ihre neunsitzigen Flugzeuge und Gesellschaft B 20 Tickets für ihre Flugzeuge mit 18 Sitzen. Welche Gesellschaft ist mit höherer Wahrscheinlichkeit überbucht?

Aufgabe 4

Wir werfen n Münzen, die unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf" zeigen. Anschließend werfen wir alle Münzen, die im ersten Wurf „Kopf" gezeigt haben ein zweites Mal. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Münzen, die im zweiten Wurf „Kopf" zeigen.

Aufgabe 5

Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Bestimmen Sie eine Dichte der Verteilung von $X + Y$.

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 21.06.2000

Musterlösung zur 1. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

a) Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, und P definiert durch $P(\{\omega\} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ für alle $\omega \in \Omega$.
Es gilt

$$A_{ij} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j\} = \bigcup_{k=1}^{6} \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\}$$

Es folgt

$$P(A_{ij}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\})$$
$$= \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = k, \omega_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6}$$

b) Für $i \neq j$ und $k \neq l$ mit $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j, \omega_k = \omega_l\}$. Wegen $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$ folgt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$, also

$$P(A_{ij} \cap A_{kl}) = \sum_{m=1}^{6} P(\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = m\}$$
$$= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36} = P(A_{ij})P(A_{kl})$$

Weiter gilt $A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\} = A_{12} \cap A_{23}$, also $P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = \frac{1}{36} \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = P(A_{12})P(A_{13})P(A_{23})$.

Aufgabe 2

Es seien $K_1^o, K_1^u, K_2^o, K_2^u$ die Ereignisse, daß im ersten bzw. zweiten Wurf ein „Kopf" oben bzw. unten liegt. M_i $(i = 1, \ldots, 5)$ bezeichne das Ereignis, daß Münze i gewählt wurde.

a) $P(K_1^o) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \mid M_i)P(M_i) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

b) $P(K_1^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_1^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{3}$.

c) $P(K_2^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_2^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{6}$.

d) $P(K_2^u \mid K_1^o \cap K_2^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o \cap K_2^o)}{P(K_1^o \cap K_2^o)} = \dfrac{P(K_2^u \cap K_2^o)}{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \cap K_2^o \mid M_i)P(M_i)}$
$= \dfrac{P(M_1 \cup M_2)}{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{10}{5} = \dfrac{4}{5}$.

Aufgabe 3

Die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Fluggesellschaft A erscheinen, ist Bin$(10, 9/10)$-verteilt, die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Gesellschaft B erscheinen, ist Bin$(20, 9/10)$-verteilt. Es sei X die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft A erscheinen, und Y die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft B erscheinen. Die Überbuchungswahrscheinlichkeit von Gesellschaft A ist folglich $P(X > 9)$, und die Überbuchungswahrscheinlichkleit von Gesellschaft B ist $P(Y > 18)$.

Nun gilt:

$$P(X > 9) = P(X = 10) = \binom{10}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \sim 0,349$$

und

$$\begin{aligned} P(Y > 18) = P(Y = 19) + P(Y = 20) &= \binom{20}{19}\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \\ &= 20\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \sim 0,392. \end{aligned}$$

Also ist Gesellschaft B mit höherer Wahrscheinlichkeit überbucht.

Aufgabe 4

Es sei X die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf „Kopf“ zeigen, und Y die Anzahl der Münzen, die beim zweiten Wurf „Kopf“ zeigen. Dann gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l).$$

X ist Bin(n, p)-verteilt, und Y ist unter der Bedingung $X = l$ Bin(l, p)-verteilt. Folglich gilt

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}p^k(1-p)^{l-k}\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{n}\frac{l!n!(n-k)!}{k!(l-k)!l!(n-l)!(n-k)!}p^{k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=k}^{n}\binom{n-k}{n-l}p^{k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{n-l-k}p^{2k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}p^{2k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}p^l 1^{n-k-l} = \binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}p^{2k}(1-p^2)^{n-k}. \end{aligned}$$

Folglich ist Y Bin(n, p^2)-verteilt. Intuitiv kann man sich das so vorstellen: Man wirft alle n Münzen zweimal und zählt nur die, die zweimal „Kopf“ zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal „Kopf“ ist aber gerade p^2.

Aufgabe 5

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, X, Y stochastisch unabhängig.

- Fall 1: $\lambda = \mu \overset{\text{A 31 a)}}{\Rightarrow} X + Y \sim \Gamma(2, \lambda) = \text{Erl}(2, \lambda)$. Also wird durch

$$f_{X+Y}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)$$

eine Dichte von $X + Y$ definiert.

- Fall 2: $\lambda \neq \mu$: Für $z \leq 0$ gilt $P(X + Y \leq z) = 0$, also $f_{X+Y}(z) = 0$. Sei nun $z > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t) dt = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu(z-t)} dt \\ &= \lambda\mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{(\mu-\lambda)t} dt = \lambda\mu e^{-\mu z} \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\mu-\lambda)t} \Big|_0^z \\ &= \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} e^{-\mu z} \left(e^{(\mu-\lambda)z} - 1 \right) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right). \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z).$$

Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 28.06.2000

2. Zusatzübung zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 1

Ist durch $f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}$$

eine Dichte gegeben?

Aufgabe 2

Das Intervall $[0,1]$ werde durch eine $R(0,1)$-verteilte Zufallsvariable in zwei Teile geteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert der Länge

a) des linken Teilstücks

b) und des kürzeren Teilstücks.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable N beschreibe die Anzahl der unabhängigen Würfe mit einem fairen Würfel, bis alle sechs Ziffern gefallen sind. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von N.

Aufgabe 4

Es sei X eine absolut-stetige Zufallsvariable mit der Dichte f_X und $k \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, für die $E(X^k)$ existiert. Zeigen Sie:

$$(\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = f_X(-x)) \Rightarrow E(X^k) = 0.$$

Aufgabe 5

Es seien X, Y Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 6

Es seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit jeweils zwei Trägerpunkten. Zeigen Sie, daß X und Y genau dann unkorreliert sind, wenn sie stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall, daß X und Y den Träger $\{0, 1\}$ haben.

Aufgabe 7

Geben Sie ein Beispiel für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen an, die nicht stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete diskrete Zufallsvariable X und $Y := X^2$.

Prof. Dr. R. Mathar RWTH Aachen, SS 2000
Michael Schmeink, Ute Kohlhaas Ausgabe: 03.07.2000

Musterlösung zur 2. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

Wir integrieren zunächst $f_{\mu,\sigma}$ über $\mathbb{R}$ und überprüfen, ob diese Integration 1 ergibt.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx &= \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}\,dx = \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2[1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}\,dx \\
&= \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx = \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\,\sigma\,dy \\
&\quad \text{mit der Substitution } y := \frac{x-\mu}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(y)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\,\pi = 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx = 1$. Außerdem ist $f_{\mu,\sigma}(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Durch $f_{\mu,\sigma}$, $\sigma,\mu \in \mathbb{R}$ ist also stets eine Dichte gegeben.

Aufgabe 2

Die auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, die das Intervall $[0,1]$ in zwei Teile zerlegt, werde mit U bezeichnet.

a) Die Länge des linken Teilstücks ist dann gerade gegeben durch den Wert der Zufallsvariablen U. Mit

$$g(u) = \begin{cases} u, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des linken Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^1 u \cdot 1\,du = 0.5.$$

b) Die Länge des kürzeren Teilstücks ergibt sich zu $\min(U, 1-U)$. Mit

$$g(u) = \begin{cases} \min(u, 1-u), & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u, & 0 < u < \frac{1}{2}, \\ 1-u, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des kürzeren Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^{\frac{1}{2}} u \cdot 1\,du + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-u)\cdot 1\,du = \frac{1}{8} + \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\Big) = 0.25.$$

Aufgabe 3

Der Würfel wird unabhängig so oft geworfen, bis alle sechs Ziffern gefallen sind. Die Anzahl der dazu benötigten Würfe ist durch die Zufallsvariable N gegeben. Die Folge der Würfe, bzw. der Ausgänge, beschreiben wir durch eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$. Den Zeitpunkt des ersten Auftretens der i-ten bisher nicht gewürfelten Zahl bezeichnen wir mit T_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$. T_i wird gemessen in der Anzahl der bisher durchgeführten Würfe. Damit gilt

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_i &= \inf\Big\{n \in \mathbb{N} | X_n \notin \{X_{T_1}, X_{T_2}, \ldots, X_{T_{i-1}}\}\Big\},\ i \in \{2, \ldots, 6\}, \end{aligned}$$

und es ist

$$N = T_6.$$

Gesucht ist der Erwartungswert und die Varianz von N, also $E[T_6]$, $\mathrm{Var}[T_6]$. Setze nun

$$\begin{aligned} N_1 &:= 1 \\ N_i &:= T_i - T_{i-1},\ i \in \{2, \ldots, 6\}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für T_i die Darstellung

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} N_j. \tag{1}$$

$N_i - 1$ ist die Wartezeit von der $(i-1)$-ten bis zur i-ten Ziffer und ist geometrisch verteilt mit Parameter $p_i = \frac{7-i}{6}$. Die N_i sind stochastisch unabhängig.
Für den Erwartungwert von T_6 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} E[T_6] &= \sum_{i=1}^{6} E[N_i] \quad \text{wegen (1)} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \Big(\frac{1-p_i}{p_i} + 1\Big) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{7-i} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 \\ &= 14.7. \end{aligned}$$

Für die Varianz von T_6 erhält man analog

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[T_6] &= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Var}[N_i], \quad \text{da die } N_i \text{ stoch. unabh.} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{{p_i}^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(1-\frac{7-i}{6})6^2}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{6^2 - 6(7-i)}{(7-i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{6(6-7+i)}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{6(i-1)}{(7-i)^2} = \frac{0}{36} + \frac{6}{25} + \frac{12}{16} + \frac{18}{9} + \frac{24}{4} + \frac{30}{1} \\ &= 38.99. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Wir setzen $g(x) := x^k f(x)$. Es folgt $g(-x) = (-x)^k f(-x) = -x^k f(x) = -g(x)$ und

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} g(-x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx$$

$$= \int_0^{-\infty} g(-x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = -\int_0^{\infty} g(x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = 0.$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(aX+b, cY+d) &= E[(aX+b)(cY+d)] - E(aX+b)E(cY+d)\\ &= E(acXY + adX + bcY + bd) - (aE(X)+b)(cE(Y)+d)\\ &= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - acE(X)E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - bd\\ &= ac(E(XY) - E(X)E(Y)) = ac\operatorname{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Da zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen immer unkorreliert sind, ist nur zu zeigen, daß aus der Unkorreliertheit die stochastische Unabhängigkeit folgt.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß X und Y beide den Träger $\{0,1\}$ haben. Da X und Y unkorreliert sind, folgt

$$0 = \operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1),$$

also

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1).$$

Folglich sind die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}$ stochastisch unabhängig. Mit Lemma 2.17 folgt:

- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig.

Mit Lemma 4.10 folgt, daß X und Y stochastisch unabhängig sind.

Im allgemeinen Fall sei $\{x_1, x_2\}$ der Träger von X und $\{y_1, y_2\}$ der Träger von Y. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, da eine Zufallsvariable X mit nur einem Trägerpunkt x stochastisch unabhängig von jeder Zufallsvariablen Y ist. (Es sei $B \in \mathfrak{B}^1$:

$$P(X=x, Y\in B) = P(Y\in B) = P(X=x)P(Y\in A)$$

und

$$P(X=x', Y\in A) = P(\emptyset) = 0 = P(X=x')P(Y\in A)$$

für alle $x' \neq x$.)

Wir setzen $a := \frac{1}{x_2-x_1}$, $b := \frac{-x_1}{x_2-x_1}$, $c := \frac{1}{y_2-y_1}$ und $d := \frac{-y_1}{y_2-y_1}$. Die Zufallsvariablen $X' := aX+b$ und $Y' := cY+d$ haben beide den Träger $\{0,1\}$, denn:

$$X(\omega) = x_1 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_1}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 0$$

und

$$X(\omega) = x_2 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_2}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 1.$$

(Y' wird analog behandelt.)

Sind X und Y unkorreliert, so folgt also

$$0 = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = \mathrm{Cov}(X', Y').$$

Also sind X' un d Y' unkorreliert und nach der Vorüberlegung auch stochastisch unabhängig. Da die Zufallsvariablen X und Y meßbare Funktionen von X' und Y' sind ($X = (x_2 - x_1)X' + x_1$, $Y = (y_2 - y_1)Y' + y_1$), sind sie nach Satz 4.16 stochastisch unabhängig.

Aufgabe 7

Es sei X gleichverteilt auf $\{-1, 0, 1\}$. Dann folgt

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)\frac{1}{3} = 0$$

und (beachte $X^3 = X$)

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = E(X) - E(X)E(X^2) = 0 - 0E(X^2) = 0,$$

also sind X und X^2 unkorreliert.
Es gilt aber

$$P(X^2 = 1, X = 0) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(X^2 = 1)P(X = 0),$$

X und X^2 sind also nicht stochastisch unabhängig.