"GeTEXnissprotokoll"

Vordiplomsklausur im Sommersemester 2000

von

Professor Mathar

zur Vorlesung

Einführung in die Stochastik für Informatiker

geschrieben und geTEXt am 20.07.MM und t von Claus Richterich, Stefan Schiffer und Thomas Deselaers

Aufgabe 1 Welche der folgenden Eigenschaften für stochastisch unabhängige Ereignisse A und B, $0 < P(A) < 1$ und $0 < P(B) < 1$ erfüllt sein ?
Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel $[(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})]$ an.

a $A \supseteq B$

b $P(A \cap B) = P(A \cup B)$

c $P(A) = P(B)$

d $A \cap B = \emptyset$

e A^C und B^C sind stochastisch unabhängig

f $P(A \cup B^C) = 1$

Aufgabe 2 Auf einer Prüfstation werden Bauteile getestet. Beim Prüfen werden 95% der defekten erkannt, aber auch 1% der intakten aussortiert.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein nicht aussortiertes Bauteil fehlerfrei?

Aufgabe 3 Die Laufzeit eines Suchverfahrens auf einem PC werde als $Exp(\lambda)$ verteilt angenommen. Die mittlere Laufzeit betrage 100 sec.

a Geben sie λ an.

b Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Lauf des Verfahrens

- **i** genau 100 sec.
- **ii** zwischen 90 und 110 sec. dauert.

c Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus b.)ii), wenn bekannt ist, dass das Verfahren schon 50 sec. läuft.

Aufgabe 4 Es sei U eine $R(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und eine Dichte des Maximums der Zufallsvariablen U und V, wobei $V = 1 - U$! Welche bekannte Verteilung ergibt sich?

Aufgabe 5 Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim R(0, 1)$. Bestimmen Sie eine Dichte der Verteilung $X + Y$!

Aufgabe 6 Bei einem Würfelspiel wird ein (unverfälschter) würfel mehrfach hintereinander geworfen. Fällt eine Eins, so wird die Punktzahl des Spielers auf 0 gesetzt und das Spiel ist beendeet. Fällt eine andere Zahl, so wird die gewürfelte Augenzahl zur Punktzahl des Spielers addiert. Der Spieler kann dann entscheiden, ob er weiterspielt oder nicht.

a Der Spieler A habe einen Punktestand von $a \in N$ Punkten. Er entschließt sich noch einen weiteren Wurd zu machen und anschließend das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz seines Punktestandes am Spielende.

b Spieler B habe einen Punktstand von $b \in N$ Punkten. Er entschließt sich, wenn möglich zweimal zu werfen (d.h. er wirft genau dann zweimal, wenn im ersten Wurf keine Eins fällt) und anschließend das Spiel zu beenden. Bestimmmen Sie den Erwartungswert seines Punktestandes am Spielende.

Aufgabe 7 Die Zufallsvariablen $X_1 ... X_n$ seien stochastisch unabhängig und jeweils geometrisch verteilt mit Parameter p $(0 < p < 1)$. Es gelte also:

$$P(X_i = k) = (1 - p)^k p \quad k \in N_0$$

Bestimmen Sie einen Maximum Likelihood Schötzer für p. Zeigen Sie, dass der Schätzer nicht erwartungstreu ist für p. Untersuchen Sie hierfür den Fall $n = 1$.

Aufgabe 8 Die Zufallsvariable X sei $N(0, 1)$ verteilt. Zeigen Sie, dass X und $Y = X^2$ zwar unkorreliert aber nicht stochastisch unabhängig sind.