Lösung zu Aufgabe 29

i) Es gilt für $t \geq 0$ und $c > 0$:

$$\begin{aligned} P(X - \mathrm{E}X \geq c) &= P(X - \mathrm{E}X + t \geq c + t) \\ &\overset{c+t>0}{\leq} P((X - \mathrm{E}X + t)^2 \geq (c+t)^2). \end{aligned}$$

ii) Für beliebiges $t \geq 0$ gilt nach der Markov-Ungleichung:

$$\begin{aligned} P((X - \mathrm{E}X + t)^2 > (c+t)^2) &\leq P((X - \mathrm{E}X + t)^2 \geq (c+t)^2) \\ &\leq \frac{1}{(c+t)^2} \cdot \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X + t)^2) \\ &= \frac{\mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)^2) + 2t\overbrace{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)}^{=0} + t^2}{(c+t)^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}X + t^2}{(c+t)^2} =: f(t). \end{aligned}$$

Setze $\sigma^2 := Var(X)$ und suche das Minimum von f (quadr. Funktion).

$$f'(t) = \frac{2t(c+t)^2 - 2(c+t)(\sigma^2 + t^2)}{(c+t)^4} = \frac{2t(c+t) - 2(\sigma^2 + t^2)}{(c+t)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(t_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2t_0(c + t_0) - 2(\sigma^2 + t_0^2) = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad 2ct_0 + 2t_0^2 - 2\sigma^2 - 2t_0^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\sigma^2}{c}. \quad (f''(t_0) > 0, \text{ also Minimum}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \frac{\sigma^2 + t_0^2}{(c+t_0)^2} = \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{c^2}}{(c + \frac{\sigma^2}{c})^2} = \frac{c^2\sigma^2 + \sigma^4}{c^4 + 2\sigma^2 c^2 + \sigma^4} \\ &= \frac{\sigma^2(c^2 + \sigma^2)}{(c^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{c^2 + \sigma^2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} P(X - \mathrm{E}X \geq c) &\overset{(i)}{\leq} P((X - \mathrm{E}X + t_0)^2 \geq (c + t_0)^2) \\ &\overset{(ii)}{\leq} \frac{\sigma^2}{c^2 + \sigma^2} = \frac{\mathrm{Var}X}{c^2 + \mathrm{Var}X}. \end{aligned}$$