Prof. Dr. E. Cramer RWTH Aachen, SS 07
Dipl.-Math. U. Seehafer

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

9. Übung

Ausgabetermin: Donnerstag, den 21.06.2007
Übungstermin: Donnerstag, den 28.06.2007, 14.00 - 14.45, Fo 2

Aufgabe 30

Seien $(\Omega, \mathfrak{Pot}(\Omega), P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit erzeugenden Funktionen g^X, g^Y.

(a) Zeigen Sie, dass die erzeugende Funktion g^{X+Y} der Summe $X+Y$ gegeben ist durch

$$g^{X+Y}(t) = g^X(t) \cdot g^Y(t), \quad t \in [-1, 1].$$

(b) Existieren die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(X(X-1))$, so gilt:

$$\mathrm{E}X = \lim_{t\to 1} \tfrac{d}{dt} g^X(t), \tag{1}$$

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \lim_{t\to 1} \tfrac{d^2}{dt^2} g^X(t). \tag{2}$$

Berechnen Sie damit $\mathrm{E}X$ und Var X für

(i) $X \sim bin(n, p), \quad n \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1)$,

(ii) $X \sim po(\lambda), \quad \lambda > 0$.

((1) und (2) können Sie ohne Beweis verwenden.)

Aufgabe 31

Sei $X \sim \text{geo}(p)$ $(p \in (0, 1))$ und h die momenterzeugende Funktion von X. Berechnen Sie $h(t)$ für $t < \log\left(\frac{1}{1-p}\right)$ sowie Erwartungswert und Varianz von X.

Aufgabe 32

Gegeben seien die Funktionen f_c $(c \in \mathbb{N})$ mit

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < 0, \\ \frac{1}{9}(x-3)^c, & \text{für} \quad 0 \le x \le 3, \\ 0, & \text{für} \quad x > 3. \end{cases}$$

(a) Für welche Werte $c \in \mathbb{N}$ ist f_c Riemann-Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung?

(b) Ermitteln Sie (für die in (a) bestimmten Werte c) die zur Riemann-Dichte f_c gehörende Verteilungsfunktion und deren Erwartungswert.

Aufgabe 33

(a) Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Weisen Sie nach:

(i) $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$,

(ii) $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(b) Eine Passantin kommt an einer Bushaltestelle an. Die Zufallsvariable $Y \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{20})$ modelliere die zufällige Wartezeit (in Minuten) bis zum Eintreffen des nächsten Busses.

(i) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Passantin länger als 20 Minuten warten muss?

(ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Passantin länger als 20 weitere Minuten warten muss, falls sie schon 20 Minuten an der Bushaltesstelle gewartet hat?

(iii) Geben Sie eine Verteilung für Y an, bei der sich die Wahrscheinlichkeit, noch länger als 10 weitere Minuten zu warten, nach 10 Minuten Wartezeit nicht verändert, nach 20 Minuten Wartezeit allerdings halbiert.