Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. U. Seehafer RWTH Aachen, SS 07

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Lösungen zur 4. Übung

Aufgabe 14

(i) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$:
1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) für $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^C \in \mathcal{A}$, da $\Omega^C = \emptyset$ und $\emptyset^C = \Omega$,
3) für jede Folge $A_1, A_2, \dots$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \emptyset \neq A \subset \Omega, A \neq \Omega$
analog zu (i)

(iii) $\mathcal{A} = \mathcal{P}ot(\Omega)$
1) $\Omega \in \mathcal{P}ot(\Omega)$,
2) für $A \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ gilt $A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{P}ot(\Omega)$,
3) für jede Folge $A_1, A_2, \dots$ mit $A_n \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$, also $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 15

a) $\mathcal{A}_\cap$ ist eine σ-Algebra:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}_\cap$, da $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_\cap$. Es gilt:
$\forall i \in I: \ A \in \mathcal{A}_i$,
$\forall i \in I: \ A^c \in \mathcal{A}_i$,
$A^c \in \mathcal{A}_\cap$.

(iii) Seien $A_j \in \mathcal{A}_\cap$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es gilt:
$\forall i \in I \, \forall j \in \mathbb{N} : \ A_j \in \mathcal{A}_i$,
$\forall i \in I : \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}_i$
also $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}_\cap$.

b) $\mathcal{A}_\cup$ ist im Allg. keine σ-Algebra:
Mit $\Omega = \{1,2,3\}$ sind die Mengensysteme

$$\mathcal{A}_1 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\big\},$$
$$\mathcal{A}_2 = \big\{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\big\} \ \sigma\text{-Algebren über } \Omega.$$

Aber deren Vereinigung

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\big\}$$

ist keine σ-Algebra, denn

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2.$$

Aufgabe 16

Betrachte $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ und $C = \{1, 4\}$.
Es ergeben sich dann:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$ und $A \cap C = \{4\}$.

Es sei $p : \Omega \to [0, 1]$ die gesuchte Zähldichte.
Dann gilt nach Voraussetzung:
$p(2) = P(\{2\}) = P(A \cap B) = \frac{1}{6}$,
$p(4) = P(\{4\}) = P(A \cap C) = \frac{1}{3}$.

Ferner: $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = p(2) + p(4) + p(6)$, also:
$p(6) = P(A) - p(2) - p(4) = \frac{5}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$.

Es gilt: $P(C) = p(1) + p(4)$, also:
$p(1) = P(C) - p(4) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Es gilt: $P(A \cup B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(6)$, also:
$p(3) = P(A \cup B) - p(1) - p(2) - p(4) - p(6) = \frac{23}{24} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Schließlich: $P(\Omega) = p(1) + ... + p(6) = 1$, also:
$p(5) = P(\Omega) - P(A \cup B) = 1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$.

Aufgabe 17

Situation: Es sei p die Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Wurf mit einer gegebenen Münze Kopf zu erzielen. Diese Münze werde nun (in unabhängiger Folge) zweimal geworfen.
Stochastisches Modell: Mit der Identifizierung 0 =Kopf und 1 =Zahl ist

$$\Omega = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

der zugrundeliegende Ergebnisraum, $\mathcal{P}ot(\Omega)$ die zugehörige σ-Algebra (also der Ereignisraum).

(i) $p = \frac{1}{2}$
In diesem Fall kann die Situation mit Hilfe der Zähldichte

$$q : \Omega \to [0, 1] , \quad \omega \mapsto \frac{1}{4}$$

modelliert werden.

(ii) $p \in [0, 1]$
Nun ist $q : \Omega \to [0, 1]$ mit

$$q(0, 0) = p^2 , \quad q(1, 0) = q(0, 1) = p(1 - p) , \quad q(0, 0) = (1 - p)^2$$

die zur Modellierung geeignete Zähldichte.