Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. U. Seehafer RWTH Aachen, SS 07

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Lösungen zur 6. Übung

Aufgabe 21

Seien S_i $(i = 1, 2)$ und $K_j, \widetilde{K}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierte Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$, sodass

- $\{S_i = 1\} \;\widehat{=}\;$ 'System S_i funktioniert', für $i = 1, 2$.
- $\{K_i = 1\} \;\widehat{=}\;$ 'Komponente K_i ist intakt' für $i = 1, \ldots, n$.
- $\{\widetilde{K}_i = 1\} \;\widehat{=}\;$ 'Komponente $\widetilde{K}_i$ ist intakt' für $i = 1, \ldots, n$.

Wir wissen $P(K_i = 0) = P(\widetilde{K}_i = 0) = p$, für $i = 1, \ldots, n$.
Den Schaltskizzen entimmt man:

$$\begin{aligned}
P(S_1 = 1) &= P((\{K_1 = 1\} \cup \{\widetilde{K}_1 = 1\}) \cap (\{K_2 = 1\} \cup \{\widetilde{K}_2 = 1\} \cap \ldots \cap \\
&\qquad (\{K_n = 1\} \cup \{\widetilde{K}_n = 1\})) \\
&\overset{Unabh.}{=} \prod_{i=1}^{n} P(\{K_i = 1\} \cup \{\widetilde{K}_i = 1\}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Big(P(K_i = 1) + P(\widetilde{K}_i = 1) - P(K_i = 1, \widetilde{K}_i = 1) \Big) \\
&\overset{Unabh.}{=} \prod_{i=1}^{n} \big(2(1-p) - (1-p)^2 \big) \\
&= (1 - p^2)^n,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P(S_2 = 1) &= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\} \cup \bigcap_{i=1}^{n} \{\widetilde{K}_i = 1\}) \\
&= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\}) + P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\widetilde{K}_i = 1\} - P(\bigcap_{i=1}^{n} \{K_i = 1\} \cap \{\widetilde{K}_i = 1\}) \\
&\overset{Unabh.}{=} 2(1-p)^n - (1-p)^{2n} \\
&= (1-p)^n (2 - (1-p)^n).
\end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned}
P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) &= (1-p)^n (1+p)^n - (1-p)^n (2 - (1-p)^n) \\
&= (1-p)^n [(1+p)^n - 2 + (1-p)^n].
\end{aligned}$$

Fall $n = 1$:
$P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) = (1-p)(1+p-2+1-p) = 0$, denn beide Systeme stimmen überein.
Fall $n > 1$:
Aus der Analysis ist die Ungleichung von Bernoulli bekannt:

$$(1+p)^n > 1 + np, \quad (1-p)^n > 1 - np \ \text{ für } 0 < p < 1 \text{ und } n > 1.$$

Damit folgt:

$$P(S_1 = 1) - P(S_2 = 1) > (1-p)^n(1 + np - 2 + 1 - np) = 0.$$

Also ist die Redundanz auf Komponentenebene besser als die Redundanz auf der Systemebene (für $n > 1$).

Aufgabe 22

Wegen der Unabhängigkeit der Ausfälle verschiedener Triebwerke werden hier die folgenden diskreten Wahrscheinlichkeitsräume betrachtet:
Für zweimotorige Flugzeuge:

$$\begin{aligned} &\Omega_1 := \{(\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1,2\} \\ &P_1(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = p^{\omega_1+\omega_2}(1-p)^{2-(\omega_1+\omega_2)} \end{aligned}$$

Für viermotorige Flugzeuge:

$$\begin{aligned} &\Omega_2 := \{(\omega_1, \ldots \omega_4) \,|\, \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots 4\} \\ &P_2(\{(\omega_1, \ldots \omega_4)\}) = p^{\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}(1-p)^{4-(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} \end{aligned}$$

mit der Interpretation: $\omega_i = 1 \mathrel{\widehat{=}}$ „i-ter Motor versagt“.
Berechne nun die Absturzwahrscheinlichkeiten:

(i) Zweimotorige Maschine:

$$\begin{aligned} A^{(2)} : &= \{(1,1)\} \mathrel{\widehat{=}} \text{„Zweimotoriges Flugzeug stürzt ab“}, \\ P(A^{(2)}) &= p^2 \cdot (1-p)^0 = p^2. \end{aligned}$$

(ii) Viermotorige Maschine:

$$\begin{aligned} A^{(4)} &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Viermotoriges Flugzeug stürzt ab“}, \\ &\mathrel{\widehat{=}} \text{„Genau drei oder genau vier Motoren fallen aus“}, \end{aligned}$$

$$P(A^{(4)}) = \binom{4}{3} p^3(1-p) + \binom{4}{4} p^4(1-p)^0 = 4p^3(1-p) + p^4.$$

Damit gilt:

$$\begin{array}{ccc} & P(A^{(4)}) & \leq & P(A^{(2)}) \\ \Leftrightarrow & p^2(4p(1-p)+p^2) & \leq & p^2 \\ \overset{p \geq 0}{\Leftrightarrow} & 4p(1-p)+p^2 & \leq & 1 \\ \Leftrightarrow & p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & (p-\frac{1}{3})(p-1) & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & p \leq \frac{1}{3} \vee p \geq 1 & & . \end{array}$$

Wegen $p \in (0,1)$ nach Voraussetzung gilt:
Für $p \in (0, \frac{1}{3})$ sind viermotorige Flugzeuge sicherer.

Aufgabe 23

(a) (i)

$$P\left(\max_{i=1\dots n} X_i \le x\right) = P(X_i \le x \;\forall i \in \{1,\dots,n\}) \overset{unabh.}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x)$$
$$\overset{\text{Def. Verteilungsfunktion}}{=} \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

(ii)

$$\begin{aligned} P\left(\min_{i=1\dots n} X_i \le x\right) &= 1 - P\left(\min_{i=1\dots n} X_i > x\right) = 1 - P(X_i > x \;\forall i \in \{1,\dots,n\}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - P(X_i \le x)\big) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F_i(x)\big) \end{aligned}$$

(b) (i): $P\left(\max_{i=1\dots n} X_i \le x\right) = \big(F(x)\big)^n$

(ii): $P\left(\min_{i=1\dots n} X_i \le x\right) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$