Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. U. Seehafer

RWTH Aachen, SS 07

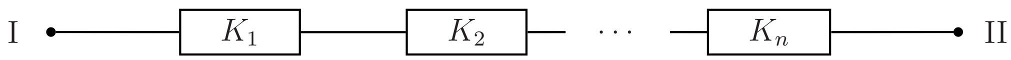
Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

6. Übung

Ausgabetermin: Mittwoch, den 24.05.2007

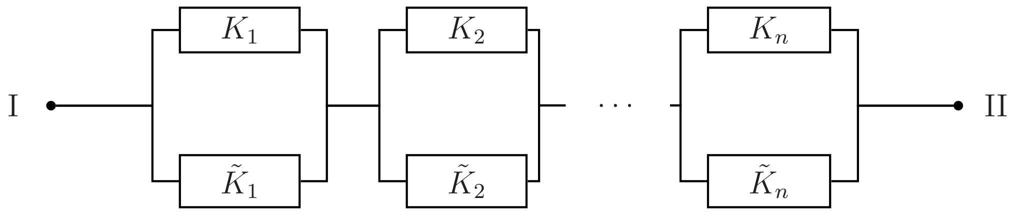
Aufgabe 21

Ein elektronisches System S bestehe aus $n \in \mathbb{N}$ Komponenten $K_1, \ldots, K_n$ in Reihenschaltung:

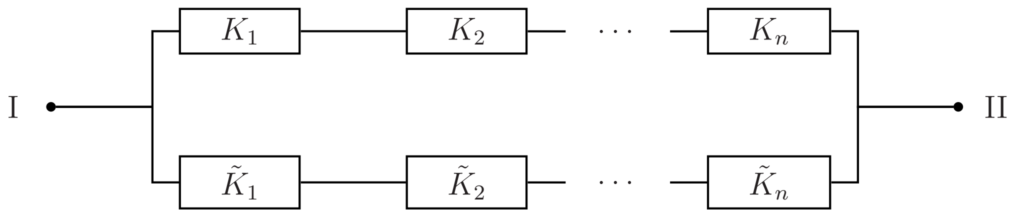


Das System S funktioniere genau dann, wenn ein Strom von I nach II fließen kann, d.h. der Ausfall einer jeden Komponente führt zum Ausfall von S.
Durch Verdoppelung jeder der Komponenten des Systems S soll nun die Zuverlässigkeit (Intaktwahrscheinlichkeit) des Systems erhöht werden. Betrachten Sie folgende Möglichkeiten der Verdoppelung:

S_1: Jede der Komponenten K_i wird durch eine Parallelschaltung zweier gleichartiger Komponenten K_i und $\tilde{K}_i$ ersetzt (**Redundanz auf Komponentenebene**):



S_2: Das gesamte System S wird durch eine Parallelschaltung zweier gleichartiger Systeme S und S' ersetzt (**Redundanz auf Systemebene**):



Jede der insgesamt $2n$ Komponenten falle zufällig und unabhängig von den übrigen aus. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer der Komponenten $K_1, \ldots, K_n$ bzw. $\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_n$ (während einer festen Zeiteinheit) betrage jeweils $p \in (0, 1)$.
Welches der Systeme S_1, S_2 ist zuverlässiger, d.h. bei welchem der beiden Systeme ist ein Stromfluß zwischen I und II (innerhalb der festen Zeiteinheit) mit größerer Wahrscheinlichkeit gewährleistet?

Aufgabe 22

Während eines Fluges versage jedes Triebwerk eines Flugzeuges unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Das Flugzeug bleibe flugfähig, wenn mindestens die Hälfte der Triebwerke funktioniert.
Vergleichen Sie die Zuverlässigkeiten von Flugzeugen mit zwei bzw. vier Triebwerken, d.h. berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das jeweilige Flugzeug funktionsfähig ist.

Aufgabe 23

Sei $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Familie stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen. Sei F_i die Verteilungsfunktion zu X_i ($i = 1 \ldots, n$).

(a) Zeigen Sie:

(i) $P\left(\max\limits_{i=1\ldots n} X_i \leq x\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$

(ii) $P\left(\min\limits_{i=1\ldots n} X_i \leq x\right) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - F_i(x))$

(b) Was ergibt sich in (a), wenn alle X_i's die gleiche Verteilung haben?