Prof. Dr. E. Cramer
Dipl.-Math. U. Seehafer RWTH Aachen, SS 07

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

8. Übung

Ausgabetermin: Donnerstag, den 14.06.2007
Übungstermin: Donnerstag, den 21.06.2007, 14.00 - 14.45, Fo 2

Aufgabe 27

Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X mit

(a) $X \sim bin(n,p),\ n \in \mathbb{N},\ p \in (0,1)$,

(b) $X \sim po(\lambda),\ \lambda > 0$.

Hinweis zu b): Betrachten Sie $\mathrm{E}(X(X-1))$.

Aufgabe 28

a) Zeigen Sie für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ und reelle Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ die Beziehungen

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^n \beta_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \mathrm{Cov}\,(X_i, Y_j)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \mathrm{Var}\,(X_i) + 2\sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)\,.$$

b) In zwei Städten A und B seien m bzw. n Telefonanschlüsse vorhanden $(m, n \in \mathbb{N})$, wobei jeder Benutzer mit jedem anderen telefonieren kann. Die Zufallsvariablen $X_i, i \in \{1, \ldots, m\}$ und $Y_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, seien dann als monatliche Gebühren des Fernsprechteilnehmers i aus A bzw. j aus B definiert.

Diese Situation wird nun wie folgt modelliert:
$(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ sei ein $(m+n)$-dimensionaler Zufallsvektor mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Var}\,(X_i) = \mathrm{Var}\,(Y_j) = \sigma^2 & ,\ \text{falls} & i \in \{1, \ldots, m\}\,, j \in \{1, \ldots, n\}\,; \\ \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = c_1 & ,\ \text{falls} & i, j \in \{1, \ldots, m\}\,, i \neq j; \\ \mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j) = c_2 & ,\ \text{falls} & i, j \in \{1, \ldots, n\}\,, i \neq j; \\ \mathrm{Cov}\,(X_i, Y_j) = c_3 & ,\ \text{falls} & i \in \{1, \ldots, m\}\,, j \in \{1, \ldots, n\}\,. \end{array}$$

Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten

$$\mathrm{Korr}(U,V) := \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)\mathrm{Var}(V)}}$$

der Zufallsvariablen $U := \sum_{i=1}^m X_i$ und $V := \sum_{j=1}^n Y_j$.

Aufgabe 29

Gegeben sei eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathrm{E}\ X^2 < \infty$. Zeigen Sie die *Ungleichung von Cantelli*:

$$\mathrm{P}(X - \mathrm{E}X \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}\ X}{c^2 + \mathrm{Var}\ X} \quad \text{für alle } c > 0.$$

Hinweis: Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}((X - \mathrm{E}X + t)^2 > (c+t)^2)$ $(t \geq 0,\ c > 0)$ mit Hilfe der Markov-Ungleichung nach oben ab und minimieren Sie die obere Schranke bezüglich t auf dem Intervall $[0, \infty)$.