Lösungsskizzen zu A34-A39

Aufgabe 34

(a) Für $x, y \in [0,2]$ gilt $f^{(X,Y)}(x,y) = cx(1+2y)$, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^2 cx(1+2y)dxdy$$
$$= c\int_0^2 (1+2y)\left[\int_0^2 xdx\right]dy = 2c\int_0^2(1+2y)dy = 12c$$

$\curvearrowright c = \frac{1}{2}$

(b) Es gilt: $f^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)dy$, $x \in \mathbb{R}$. Für $x \notin [0,2]$ gilt $f^X(x) = 0$. Ansonsten folgt

$$f^X(x) = \int_0^2 \frac{1}{12}x(1+2y)dy = \frac{x}{2}, \quad x \in [0,2].$$

Analog erhält man

$$f^Y(y) = \begin{cases} \frac{1+2y}{6}, & y \in [0,2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Da $f^{(X,Y)}(x,y) = f^X(x) \cdot f^Y(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, sind X und Y stochastisch unabhängig.
(d) Es gilt

$$EY = \int_0^2 y\frac{1+2y}{6}dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y^2}{2}+\frac{2}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{11}{9}$$
$$EY^2 = \int_0^2 y^2\frac{1+2y}{6}dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{9}$$
$$\operatorname{Var}(Y) = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{23}{81}$$

Aufgabe 35

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$. Likelihoodfunktion:

$$L(p) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i} = p^n(1-p)^{n\overline{x}}$$

$$\curvearrowright \quad l(p) = \ln L(p) = n \cdot \ln p + n\overline{x}\ln(1-p)$$

$$\begin{aligned} l'(p) &= \frac{n}{p} - \frac{n\overline{x}}{1-p} = \frac{n}{p(1-p)}(1-p-\overline{x}p) \\ &= \underbrace{\frac{n}{p(1-p)}}_{>0}\left(1-\underbrace{(1+\overline{x})}_{>0}p\right) \quad \begin{cases} <0, & p > \frac{1}{1+\overline{x}} \\ =0, & p = \frac{1}{1+\overline{x}} \\ >0, & p < \frac{1}{1+\overline{x}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad l \quad \text{streng} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{ in } [0, \frac{1}{1+\overline{x}}] \\ \\ \searrow \text{ in } [\frac{1}{1+\overline{x}}, 1] \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \widehat{p} = \frac{1}{1+\overline{X}} \qquad \text{ML-Schätzer für } p.$$

(b) Seien $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad L(\sigma) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sigma^n}\exp\left\{-\frac{n\cdot\widehat{\sigma}_\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

$$l(\sigma) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{n\widehat{\sigma}_\mu^2}{2\sigma^2}$$

$$l'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n\widehat{\sigma}_\mu^2}{\sigma^3} = \underbrace{-\frac{n}{\sigma^3}}_{<0}(\sigma^2 - \widehat{\sigma}_\mu^2) \quad \begin{cases} <0, & \sigma^2 > \widehat{\sigma}_\mu^2 \\ =0, & \sigma^2 = \widehat{\sigma}_\mu^2 \\ >0, & \sigma^2 < \widehat{\sigma}_\mu^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad l \quad \text{streng} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{ auf } (0, \widehat{\sigma}_\mu^2) \\ \\ \searrow \text{ auf } (\widehat{\sigma}_\mu^2, \infty) \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad \widehat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ ist ML-Schätzer für σ^2 (bei bekanntem μ).

Aufgabe 36

$\widehat{\vartheta}_n = \frac{2}{n}(X_1+\ldots+X_n)$, wobei X_i Rechteck-verteilt auf $[0,b]$

(a) $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu für b, falls $E_b\widehat{\vartheta}_n = b \;\forall b>0$.

$$\begin{aligned} E_b\widehat{\vartheta}_n &= E_b\left[\frac{2}{n}(X_1+\ldots+X_n)\right] = \frac{2}{n}\left[E_bX_1+\ldots+E_bX_n\right] \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ (E_bX_i=b/2)}}{=} \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{b}{2} = \underline{\underline{b}} \quad \forall b>0 \end{aligned}$$

$\curvearrowright \quad \widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu

(b) $\mathrm{Var}\ X_i = b^2/12$

$$\curvearrowright \mathrm{Var}\ \widehat{\vartheta}_n = \mathrm{Var}\left[\frac{2}{n}(X_1+\ldots+X_n)\right] \underset{\substack{\uparrow \\ X_1\ldots X_n \\ \text{stoch. unabh.}}}{=} \frac{4}{n^2}(\mathrm{Var}\ X_1+\ldots+\mathrm{Var}\ X_n)$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{b^2}{12} = \underline{\underline{\frac{b^2}{3n}}}$$

Aufgabe 37

(a) $\widehat{\vartheta}$ erwartungstreu für ϑ, falls $\vartheta = E_\vartheta(\widehat{\vartheta}) \;\forall\vartheta\in\mathbb{R}$.

$$E_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = a\,E(\widehat{\vartheta}^{(1)}) + b\,E(\widehat{\vartheta}^{(2)}) = 3a\vartheta + 2b\vartheta = (3a+2b)\vartheta \quad \forall\vartheta\in\mathbb{R}$$

$\curvearrowright \quad \widehat{\vartheta}$ erwartungstreu $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{3a+2b=1}}$ $\circledast$

(b) Da $\widehat{\vartheta}^{(1)}$ und $\widehat{\vartheta}^{(2)}$ stochastisch unabhängig sind, gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\widehat{\vartheta} = \quad & a^2 \operatorname{Var}\widehat{\vartheta}^{(1)} + b^2 \operatorname{Var}\widehat{\vartheta}^{(2)} = a^2 + 9b^2 \\ \underset{\left(b=\frac{1-3a}{2} \text{ nach } \circledast\right)}{=} \quad & a^2 + 9\left(\frac{1-3a}{2}\right)^2 =: f(a) \longrightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}f'(a) &= 2a + 9\cdot 2\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-3a}{2}\right) = 2a - \frac{3}{2}(9-27a) \\ &= \frac{85}{2}a - \frac{27}{2} \quad \begin{cases} >0, & a > \frac{27}{85} \\ =0, & a = \frac{27}{85} \\ <0, & a < \frac{27}{85}\end{cases}\end{aligned}$$

liefert $a = \frac{27}{85} \approx 0,3176$ die gesuchte Minimalstelle.

$\curvearrowright$ Die Varianz wird für $a = \frac{27}{85}$ und $b = \frac{2}{85}$ minimal.

Aufgabe 38

(a) Schätzwert: $\overline{x} = \frac{1}{12}(35,6 + \ldots + 34,0) = \frac{423,4}{12} = \underline{\underline{35,28\overline{3}}}$

(b) (i) $\sigma^2 = 3,24 \Rightarrow \sigma = 1,8$, $\underline{\underline{\alpha = 0,05}}$.

Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall K (zum Niveau $1-\alpha = 0,95$) für den Erwartungswert μ einer $N(\mu,\, 3,24)$-verteilten Zufallsvariable.

$$K = \left[\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{12}}, \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{12}}\right],$$

wobei $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, das $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung, also$\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$.
Damit ergibt sich lt. Tabelle: $\underline{\underline{u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96}}$

$$\curvearrowright K = \left[\underbrace{\overline{x}}_{=35,28} - 1,96\cdot\frac{1,8}{\sqrt{12}}, 35,28 + 1,96\cdot\frac{1,8}{\sqrt{12}}\right] = [34,26; 36,30]$$

(ii) $\alpha = 0,05$, σ unbekannt

$$\underset{\text{Vorlesung}}{\longrightarrow} \quad K = \left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right],$$

wobei

- $\overline{x} = 35,28 \quad$ (nach (a)),
- $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$–Quantil der $t(n-1)$-Verteilung ist,

$$\underset{\text{Tabelle}}{\longrightarrow} \quad t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0,975}(11) = 2,201,$$

- und $\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \approx 1,852$ der Schätzwert für die zugehörige Streuung ist.

$$\curvearrowright K = \left[35,28 - 2,201\frac{1,852}{\sqrt{12}}, 35,28 + 2,201\frac{1,852}{\sqrt{12}}\right] = [34,10; 36,46]$$

(c) Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen (bei unbekanntem μ) zum Niveau $1 - \alpha = 0,95$.

$$\underset{\text{Vorlesung}}{\longrightarrow} \quad K = \left[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\widehat{\sigma}^2, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\widehat{\sigma}^2\right],$$

wobei $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx \underline{\underline{3,43}}$ und $\chi^2_\beta(n-1)$ (für $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$) die β-Quantile der χ^2-Verteilung mit $n-1 = 11$ Freiheitsgraden sind.

$$\underset{\text{Tabelle}}{\longrightarrow} \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(11) = \chi^2_{0,975}(11) = 21,92$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(11) = \chi^2_{0,025}(11) = 3,82$$

$$\curvearrowright K = \left[\frac{11}{21,92} \cdot 3,43 \; \frac{11}{3,82} \cdot 3,43\right] = \underline{\underline{[1,72; 9,88]}}$$

Aufgabe 39

(a) Die Methode der kleinsten Quadrate führt zu:

$$\widehat{y}(x) = \widehat{a} + \widehat{b}x$$

mit $\widehat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$ und $\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b}\overline{x}$, wobei

$$\overline{x} = \tfrac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = 3,5; \qquad \overline{y} = \tfrac{1}{6}(4,7 + \ldots + 20,3) = 12,5$$

$$s_{xy} = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \approx 9,017$$

$$s_{xx} = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 \approx 2,917$$

$\curvearrowright$ $\widehat{b} = \frac{9,017}{2,917} = \underline{3,091}$ und $\widehat{a} = 12,5 - 3,091 \cdot 3,5 = \underline{1,682}$

$\curvearrowright$ $\quad \widehat{y}(x) = 1,682 + 3,091 \cdot x$

(b)
$$K_b = \left[\widehat{b} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ns_{xx}}}, \widehat{b} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ns_{xx}}}\right],$$

wobei $\sigma = \sqrt{2,56} = 1,6$, $n = 6$, $\alpha = 0,02$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,99} \approx 2,33$, sowie $\widehat{b} = 3,091$ und $6 \cdot s_{xx} = 17,502$ (nach (a))

$\curvearrowright$ $K_b = \underline{\underline{[2,200; 3,982]}}$