

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

11. Übung

Ausgabetermin: Donnerstag, den 05.07.2007

Übungstermin: Donnerstag, den 12.07.2007, 14.00 - 14.45, Fo 2

Aufgabe 37

Zwei Statistiker entwickeln unabhängig voneinander jeweils eine Schätzfunktion $\hat{\vartheta}^{(i)}$ ($i \in \{1, 2\}$) für den unbekannten Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und bestimmen basierend auf ihrer Schätzfunktion einen Schätzwert für ϑ . Den beiden Schätzungen liegen unabhängig voneinander erhobene Daten zugrunde und es gilt

$$\begin{aligned} E[\hat{\vartheta}^{(1)}] &= 3\vartheta, & Var(\hat{\vartheta}^{(1)}) &= 1, \\ E[\hat{\vartheta}^{(2)}] &= 2\vartheta, & Var(\hat{\vartheta}^{(2)}) &= 9. \end{aligned}$$

Die zwei Statistiker beschließen, als Kompromiss eine Linearkombination $\hat{\vartheta} = a\hat{\vartheta}^{(1)} + b\hat{\vartheta}^{(2)}$ ihrer Schätzfunktionen bzw. Schätzwerte zu benutzen, wobei die Zahlen a und b noch zu bestimmen sind.

- (a) Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit $\hat{\vartheta}$ erwartungstreu für ϑ ist?
- (b) Bestimmen Sie a und b so, dass $\hat{\vartheta}$ unter allen erwartungstreuen Schätzern obiger Art minimale Varianz besitzt.

Aufgabe 38

Auf 12 Versuchsflächen wurde eine neue Weizensorte angebaut. Die Flächen erbrachten die folgenden Hektarerträge (in 100 kg):

$$\begin{array}{cccccc} 35,6 & 33,7 & 37,8 & 31,2 & 37,2 & 34,1 \\ 35,6 & 36,6 & 37,1 & 34,9 & 35,6 & 34,0 \end{array} .$$

Aus Erfahrung ist bekannt, dass Hektarerträge als Realisierung stochastisch unabhängiger $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

- (a) Bestimmen Sie einen Schätzwert für μ .
- (b) Ermitteln Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zur Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ für den Erwartungswert μ , falls
 - (a) $\sigma^2 = 3,24$ bekannt,
 - (b) σ^2 unbekanntist.
- (c) Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0,95$ für die Varianz σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert μ .

Aufgabe 39

In sechs aufeinander folgenden Jahren ($x_i = i = 1, \dots, 6$) erzielte ein Unternehmen der Elektroindustrie die folgenden Jahresumsätze y_i (in Mio. EUR):

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	4,7	8,1	10,9	13,8	17,2	20,3

Es soll der Zusammenhang zwischen Umsatz und Zeit mittels linearer Regression untersucht werden. Dabei gehe man vom Modell

$$Y_i = a + bx_i + U_i \quad (i = 1, \dots, 6)$$

mit stochastisch unabhängigen $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilten Fehlern U_i aus, wobei die Varianz $\sigma^2 = 2,56$ als bekannt vorausgesetzt wird.

- (a) Schätzen Sie die Parameter a und b bzw. die Regressionsgerade $y(x) = a + bx$ (mittels der Methode der kleinsten Quadrate).
- (b) Geben Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,98$ ein zweiseitiges Konfidenzintervall für b an.