Aufgabe 1 (9 + 4 = 13 Punkte)

Gegeben sei folgender metrischer Datensatz:

$$x_1 = 1\ , \quad x_2 = 0.75\ , \quad x_3 = 1\ , \quad x_4 = 3.75\ , \quad x_5 = 1.5\ , \quad x_6 = 3.25\ , \quad x_7 = 1\ , \quad x_8 = 3.75.$$

(a) (i) Geben Sie zu diesem Datensatz die empirische Verteilungsfunktion F_8 an.

(ii) Wie kann man aus der empirischen Verteilungsfunktion F_8 aus (i) einen Modus des Datensatzes ablesen? Geben Sie diesen Modus x_{mod} an.

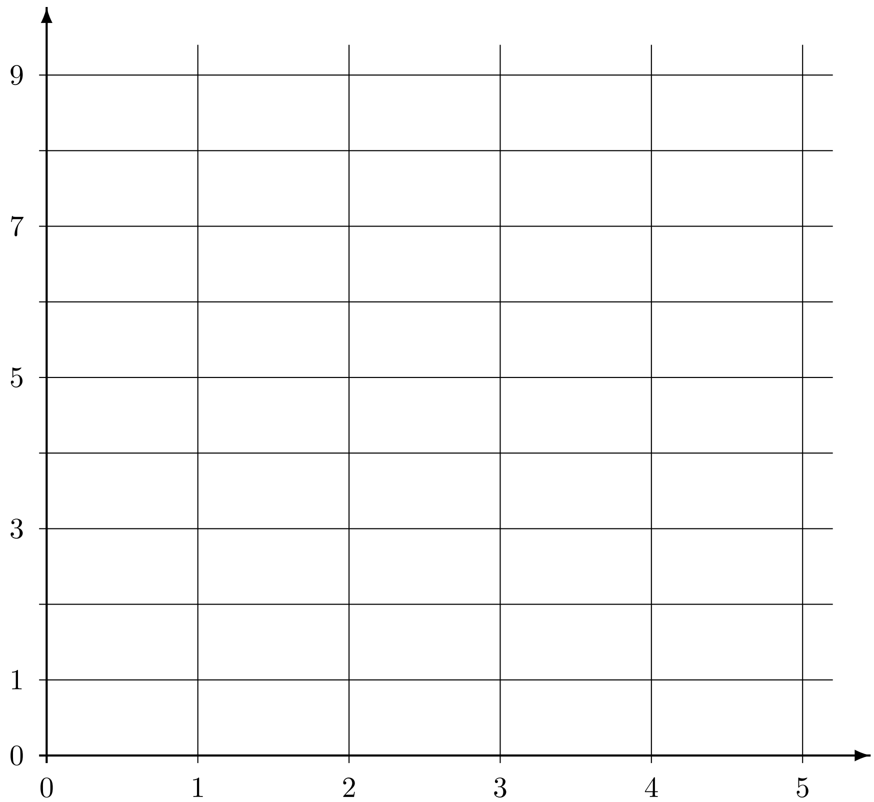
(iii) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Datensatzes (hierbei wird eine vollständige Rechnung verlangt).

(iv) Berechnen Sie den Quartilsabstand des Datensatzes (hierbei wird eine vollständige Rechnung verlangt).

(b) Berechnen Sie zu der Klassierung

$$K_1 = [0, 1]\ , \quad K_2 = (1, 3]\ , \quad K_3 = (3, 4]$$

die relativen Klassenhäufigkeiten $f(K_i)$, die Klassenbreiten b_i und die Höhen der Rechtecke im zugehörigen Histogramm h_i, $i = 1, 2, 3$, bei einer Skalierung mit dem Proportionalitätsfaktor $c = 16$. Zeichnen Sie anschließend das zugehörige Histogramm in das unten stehende Koordinatensystem ein.



Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte)

(a) Fünf Karten, die mit den Zahlen eins bis fünf beschriftet sind, werden verdeckt, gemischt und nebeneinander auf einen Tisch gelegt.

(i) Die ersten beiden Karten dieser Reihe werden aufgedeckt. Beschreiben Sie dieses Experiment mithilfe eines Laplace-Raumes. Geben Sie hierzu die Grundmenge Ω sowie das Wahrscheinlichkeitsmaß P an. Beschreiben Sie weiter das Ereignis

A: Die 2. Karte zeigt einen Wert, der den Wert der 1. Karte um mindestens zwei übersteigt.

als Teilmenge von Ω und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

(ii) Die erste Karte wird aufgedeckt und ihr Wert notiert. Im Anschluss werden alle fünf Karten verdeckt neu gemischt und wieder nebeneinander gelegt. Nun wird die zweite Karte der neuen Reihe aufgedeckt und auch ihr Wert notiert. Beschreiben Sie auch dieses Experiment mithilfe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes, und geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A aus (i) in dieser Situation an.

(b) Die Zeit (in Minuten gemessen) zwischen der Versendung zweier E-Mails von einem in der Kundenberatung tätigen Mitarbeiter der Firma STRSS werde durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 10 (Minuten) beschrieben. Berechnen Sie

(i) die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 10 Minuten übersteigt.

(ii) die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 20 Minuten übersteigt, bedingt unter der Annahme, dass diese mindestens 10 Minuten beträgt.

Aufgabe 3 (5 + 6 = 11 Punkte)

(a) Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X \sim geo(p)$ für ein $p \in (0,1)$, d.h.

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g_X von X.

(ii) Berechnen Sie mithilfe der in Aufgabenteil (a) berechneten wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion g_X den Erwartungswert EX der Zufallsvariablen X.

(b) Sei Z eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $Z \sim Beta(n,1)$, d.h. die Verteilungsfunktion F^Z bzw. die Riemanndichtefunktion f^Z von Z ist gegeben durch

$$F^Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z \leq 0 \ , \\ z^n & , \ 0 < z < 1 \ , \\ 1 & , \ z \geq 1 \ , \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f^Z(z) = \begin{cases} nz^{n-1} & , \ z \in (0,1) \ , \\ 0 & , \ \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ gelte. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Q = -\ln(Z)$.

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte)

(a) Die Ingenieure Frinnsei und Esiew sind Mitarbeiter einer Fabrik, die Limonade herstellt und diese in Tetra Paks à 200 Milliliter (ml) abfüllt. Da in letzter Zeit die Abfüllanlage mehrfach ausgefallen war, wurden die Ingenieure beauftragt, die Anlage hinsichtlich der jeweils pro Tetra Pak abgefüllten Menge zu überprüfen. Zu diesem Zweck wählen die Ingenieure neun abgefüllte Tetra Paks zufällig aus, überprüfen jeweils die abgefüllte Menge und erhalten hierbei den folgenden Datensatz (in ml):

$$203 \quad 203 \quad 207 \quad 207 \quad 198 \quad 199.5 \quad 200.5 \quad 202 \quad 207.$$

(i) Herr Frinnsei schlägt vor, die Daten als Realisationen von stochastisch unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, ..., Y_9$ mit $Y_i \sim po(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., 9$, anzusehen und ein Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter λ zu bestimmen, der mit dem Erwartungswert von Y_1 übereinstimmt. Nehmen Sie zu diesem Vorschlag (kurz) Stellung.

(ii) Herr Esiew betrachtet die Daten als neun Realisationen $x_1, x_2, ..., x_9$ von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_9$ unter der Annahme, dass $X_i \sim N(\mu, \frac{9}{4})$, $i = 1, 2, ..., 9$, gelte, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ (in ml) unbekannt und die Varianz aus einer Voruntersuchung bekannt sei. Geben Sie unter Verwendung dieses Modells ein zweiseitiges 0.95-Konfidenzintervall für μ an.

(b) In einer Umfrage wurden 48 Studierende der Mathematik gefragt, ob sie der Ansicht sind, dass in Umfragen ab einer Größe von 48 Befragten eine approximative Berechnung von Konfidenzintervallen zulässig ist. 36 der befragten Personen beantworteten diese Frage mit einem Ja. Geben Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell für diese Umfrage an, und berechnen Sie ein zweiseitiges approximatives 0.9-Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit, auf die obige Frage ein Ja von einem Studierenden der Mathematik als Antwort zu erhalten.