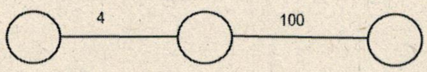
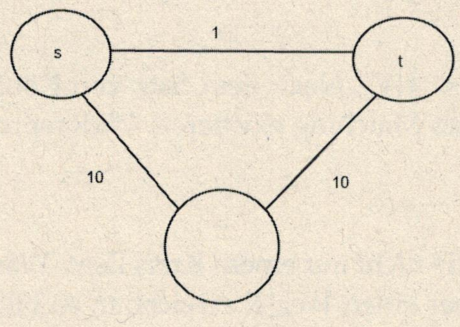
Musterlösung

Task 1)
a) Counterexample:



(Orientierung von Links nach Rechts)

b) Counterexample:



(Orientierung von Links nach Rechts)

c) Proof: Let $C = \{a_1, ..., a_n\}$ be the min cut in the original graph. Then it holds that $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$. Since C is the min cut in the original graph, it holds that C is the min cut in the modified graph.

d) By Gallai's Theorem it holds that $|V| = \rho(G) + \nu(G)$. So the statement is wrong.

e) By König's matching Theorem the equality holds only in bipartite graphs. So the statement is wrong.

<u>Task 2)</u>
Apply Ford-Fulkerson-Algorithm

<u>Task 3)</u>
$'' \Leftarrow ''$: Sei G nicht bipartite und $C = \{v_1, ..., v_{2k+1} = v_1\}$ ein minimaler ungerader Kreis. Dann betrachte den Pfad der Länge k von v_1 nach v_{k+1} und von v_1 nach v_{k+2} über v_{2k+1}. Damit haben wir einen kürzesten $v_1 - v_k$-Weg und kürzesten $v_1 - v_{k+1}$-Weg mit gleicher Länge und existenter Kante $v_{k+1}v_{k+2}$. Widerspruch.

$'' \Rightarrow ''$: Sei G ein bipartiter Graph mit den Farbklassen U und W, weiter sei ohne Einschränkung $a \in U$. Dann müssen alle Wege zwischen a und einem beliebigen Knoten aus W eine ungerade Kantenanzahl haben. Die Wege zwischen a und den übrigen Kanten aus U müssen alle gerade Länge haben. Da es nur Kanten zwischen U und W gibt, gilt die Behauptung.

<u>Task 4)</u>
$'' \Leftarrow ''$: Aus dem Satz von König folgt $\nu(G) \geq \frac{1}{2}|V|$. Klar ist, dass $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V|$. Also gilt $\nu(G) = \frac{1}{2}|V|$ und G hat ein perfektes Matching.

$'' \Rightarrow ''$: Angenommen $\tau(G) < \frac{1}{2}|V|$. Nach dem Satz von König folgt somit $\nu(G) < \frac{1}{2}|V|$. Also kann kein perfektes Matching existieren. Widerspruch.

<u>Task 5)</u>
$'' \Rightarrow ''$: Betrachte $e = \{u, v\}$ die nicht auf einem Kreis liegt. Wäre nach Entfernen von e der Knoten v von u aus über einen Weg P erreichbar, so bildet ein kürzester Weg P' zusammen mit e einen Kreis. Widerspruch.

$" \Leftarrow "$: Sei $e \in E$ und $v, w \in V$ beliebig. Da G zusammenhängend ist, existiert ein Pfad P von u nach v in G. Wenn P die Kante e nicht benutzt, ist nichts zu zeigen. Andernfalls kann in dem Weg e durch das Teilstück des Kreises auf dem e liegt ersetzt werden.

Task 6)

a) Bezeichne P die Menge der s-t-Pfade. Dann bezeichne $x_p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ den Wert des Flusses über den Pfad $p \in P$.

$\max \sum_{p \in P} x_p$
s.t. $\sum_{\substack{p \in P, \\ \text{mit } a \in p}} x_p \leq c_a \ \forall a \in A$
$x_p \geq 0$

b) $\min \sum_{a \in A} c_a y_a$
$\sum_{a \in p} y_a \geq 1 \ \forall p \in P$
$y_a \geq 0$

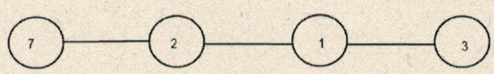
c) Nach Hinweis ist die Matrix im dualen Problem totally unimodular. Somit gilt ohne Einschränkung $y_a \in \mathbb{Z}$. In einer optimalen Lösung wird kein y_a einen Wert größer als 1 haben, also ohne Einschränkung $y_a \leq 1$. Somit gilt insgesamt $y_a \in \{0, 1\}$.

max-Flow $\overset{(b)}{=}$ Relaxation-Min-Cut = Min des Dualen aus (b) mit $y_a \in \{0, 1\}$ = Min-Cut.

Task 7)

a)

b)



c) Bezeichne S_i eine unabhängige Menge auf $\{v_1, ..., v_i\}$ und sei X_i ihr Gewicht.
$X_0 := 0 \;\; X_1 := w_1$.
Für $i > 1$:
$-v_i \in S_i \Rightarrow v_{i-1} \notin S_i \Rightarrow X_i = w_i + X_{i-2}$
$-v_i \notin S_i \Rightarrow v_{i-1} \in S_i$oder $v_{i-1} \notin S_i \Rightarrow X_i = Xi - 1$
$\Rightarrow X_i = \max\{w_i + X_{i-2}, X_{i-1}\}$
$\Rightarrow \mathcal{O}(n)$

Task 8)
a) Nimm die Knoten A und D

b) Stichwort Brücke

c) $'' \Rightarrow ''$: Angenommen A kann in zwei Mengen S_1, S_2 mit $\sum_{i \in S_1} a_i = \sum_{i \in S_2} a_i = B$ partitioniert werden. Für alle $i \in S_1$ teile G an $v_{i,2}$ und $v_{i,4}$. Für alle $i \in S_2$ teile G an $v_{i,1}$ und $v_{i,3}$. Die Komponente die s enthält hat Gewicht $n \cdot 1 + \sum_{i \in S_1} a_i = n + B$. Die Komponente die t enthält hat Gewicht $n \cdot 1 + \sum_{i \in S_2} a_i = n + B$. Die restlichen Komponenten bestehen aus zwei Knoten mit Gewicht $B - a_i + n + a_i = B + n$
$\Rightarrow$: Es gibt $2n$ Komponenten mit Wert $B + n$.

$'' \Leftarrow ''$: Angenommen G hat $2n$-Teilungen mit B+n Gewicht. Für jeden Pfad i von s nach t muss G an mindestens 2 der Knoten $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}$ geteilt werden. Da maximal 2n Knoten geteilt werden können, kann kein weiterer geteilt werden. Nun können die Mengen S_1, S_2 wie folgt definiert werden:
Für alle i ohne Teilung an $v_{i,1}$ füge i zu S_1 hinzu, andernfalls füge i zu S_2 hinzu. Die Komponente mit s hat n Kanten mit 1 und für alle $i \in S_1$ eine Kante mit Gewicht a_i.
$\Rightarrow n + \sum_{i \in S_1} a_i \leq n + B \Rightarrow \sum_{i \in S_1} a_i \leq B$.
Für jedes $i \in S_2$ gilt analog:
$n + \sum_{i \in S_2} a_i \leq n + B \Rightarrow \sum_{i \in S_2} a_i \leq B$.
S_1 und S_2 bilden eine Partition von S und $\sum_{i \in S} a_i = 2B$.
$\Rightarrow$ Für die Partitionierung gilt $\sum_{i \in S_1} a_i = \sum_{i \in S_2} a_i = B$