Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
10	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$	o Ja o Nein
11	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$	o Ja o Nein
20	$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$	o Ja o Nein
21	$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$	o Ja o Nein
30	Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.	o Ja o Nein
31	Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 16 Elemente.	o Ja o Nein
40	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	o Ja o Nein
41	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	o Ja o Nein
50	Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat 2 Elemente.	o Ja o Nein
51	Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat 3 Elemente.	o Ja o Nein
2	Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
10	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	o Ja o Nein
11	$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	o Ja o Nein
20	Wenn $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.	o Ja o Nein
21	Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.	o Ja o Nein
30	$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$	o Ja o Nein
31	$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$	o Ja o Nein
40	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	o Ja o Nein
41	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	o Ja o Nein
50	Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.	o Ja o Nein
51	Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$.	o Ja o Nein

3	Geben Sie jeweils die Anzahl der Abbildungen mit den beschriebenen Eigenschaften an.	
10	Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{4,5\}$.	
11	Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4,5\}$.	
20	Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{1,2,3\}$.	
21	Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{3,2,1\}$ nach $\{6,5,4\}$.	
30	Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1,\{2,3\},3\}$ nach $\{-1,-2,-3\}$.	
31	Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{-3,-2,-1\}$ nach $\{1,\{2,3\},3\}$.	
40	Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{\emptyset\}$ nach $\{1,2,3\}$.	
41	Anzahl der injektiven Abbildungen von $\emptyset$ nach $\{1,2,3\}$.	
50	Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{\emptyset\}$.	
51	Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\emptyset$.	
4	Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
10	Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$ ist injektiv.	o Ja o Nein
11	Die Abbildung $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, x\mapsto x^2$ ist injektiv.	o Ja o Nein
20	Die Abbildung $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, x\mapsto 2\cdot x$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
21	Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, x\mapsto 2\cdot x$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
30	Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, (x,y)\mapsto x+y$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
31	Die Abbildung $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}, (x,y)\mapsto x-y$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
40	Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, x\mapsto (x,-x)$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
41	Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, x\mapsto (x,-x)$ ist injektiv.	o Ja o Nein
50	Die Abbildung $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, (x,y)\mapsto (x+y,x-y)$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
51	Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, (x,y)\mapsto (x+y,x-y)$ ist injektiv.	o Ja o Nein

5 Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion.

(i) Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

(iii) Finden Sie zuerst eine Formel, die für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ angibt, und beweisen Sie diese.

6 Sei M eine endliche Menge und $f : M \longrightarrow M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) f ist surjektiv.

(b) f ist injektiv.

(c) f ist bijektiv.

Geben Sie eine Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ an, die zeigt, dass die oben angegebene Äquivalenz für unendliche Mengen nicht gilt.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Die folgenden Abbildungen seien gegeben. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \mapsto \lvert\{p \in \mathbb{N} \mid\ p \text{ Primzahl}, p \leq x\}\rvert$ $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \mapsto 4x$ $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \{10, 23, 19, 1\},\ x \mapsto 1$	
10	Der Wertebereich von $g \circ f$ ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
11	Der Wertebereich von $h \circ g$ ist $\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
20	Die Komposition $g \circ h$ ist definiert.	o Ja o Nein
21	Die Komposition $h \circ f$ ist definiert.	o Ja o Nein
30	Das Bild von $h \circ g$ enthält genau ein Element.	o Ja o Nein
31	Das Bild von $g \circ f$ ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
40	Es gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.	o Ja o Nein
50	Die Faser $(h \circ g \circ f)^{-1}(\{1\})$ ist $\mathbb{R}$.	o Ja o Nein
51	Die Faser $(h \circ g \circ f)^{-1}(\{1\})$ ist $\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
2	Gelten die folgenden Aussagen für alle Abbildungen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$?	
10	Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
11	Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
20	Der Wertebereich von f ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
21	Der Wertebereich von g ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
30	Das Urbild $f^{-1}(\mathbb{Q})$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
31	Das Urbild $g^{-1}(\{1, 2, 3\})$ ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
40	Das Bild von g ist $\{1, 2, 3\}$.	o Ja o Nein
41	Das Bild von f ist $\mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
50	g ist genau dann surjektiv, falls g drei nicht-leere Fasern besitzt.	o Ja o Nein
51	Falls jede Faser von f genau ein Element besitzt, so ist f bijektiv.	o Ja o Nein

3	Sei (LGS) das lineare Gleichungssytem über $\mathbb{R}$: $$\begin{array}{cccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + \ldots + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + \ldots + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + \ldots + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array}$$	
10	Die Koeffizienten des (LGS) sind die a_{ij}.	o Ja o Nein
11	Die Koeffizienten des (LGS) sind die x_i.	o Ja o Nein
20	Die x_i sind die Unbekannten des (LGS).	o Ja o Nein
21	Die x_i bilden eine Lösung des (LGS).	o Ja o Nein
30	Ist $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann gibt es eine Lösung.	o Ja o Nein
31	Ist $b_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann gibt es eine Lösung.	o Ja o Nein
40	Wenn $m > n$ ist, dann gibt es keine Lösung.	o Ja o Nein
41	Wenn $m < n$ ist, dann gibt es unendlich viele Lösungen.	o Ja o Nein
50	Sind für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ die Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \mathbb{Z}$, dann besteht auch jede Lösung aus Zahlen in $\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
51	Sind die Koeffizienten des (LGS) und die Einträge auf den rechten Seiten ganzzahlig, so auch alle Zahlen in einer Lösung.	o Ja o Nein
4	In den folgenden Aufgaben sei K ein beliebiger Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1.	
10	Für $a \in K$, $a \neq 0$, ist die Abbildung $K \longrightarrow K$, $x \mapsto ax$, bijektiv.	o Ja o Nein
11	Für alle $a \in K$ ist die Abbildung $K \longrightarrow K$, $x \mapsto ax$, bijektiv.	o Ja o Nein
20	Für alle $a \in K$ gilt $-(-a) - a = 0$.	o Ja o Nein
21	Für alle $a \in K$ gilt $-(-a) = a$.	o Ja o Nein
30	Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$.	o Ja o Nein
31	Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist $(a^{-1})^{-1} = 1$.	o Ja o Nein
40	Für alle $a, b, c \in K$ ist $(a + 0 - c)(b + 1) = b(a + b - c) + a - b^2 - c$.	o Ja o Nein
41	Für alle $a, b, c \in K$ ist $(a + 0 - c)(b + 1) = b(a + b - c) + a - b - c$.	o Ja o Nein
50	Wenn für $a, b, c \in K$ die Gleichung $a + c = b + c$ gilt, so ist $a = b$.	n.a., evt.: o Ja o Nein
51	Wenn für $a, b, c \in K$ die Gleichung $ac = bc$ gilt, so ist $a = b$.	n.a., evt.: o Ja o Nein
60	Für alle $a \in K$ gilt $0 \cdot a = 0$.	o Ja o Nein
61	Für alle $a \in K$ gilt $0 \cdot a = a$.	o Ja o Nein

5 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen den Mengen M und N. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

(b) Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$, dann ist f surjektiv.

(c) Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$, dann ist f injektiv.

6 Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 5x_1 & +6x_2 & +(a+15)x_3 & = & 7 \\ -x_1 & & +(a-3)x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +(a+2)x_2 & +7x_3 & = & 4 \end{array}$$

über den reellen Zahlen (a) keine, (b) genau eine, (c) genau zwei oder (d) unendlich viele Lösungen?

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei K ein beliebiger Körper. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
10	Jeder Körper hat unendlich viele Elemente.	o Ja o Nein
11	Jeder Körper hat nur endlich viele Elemente.	o Ja o Nein
20	In jedem Körper ist $1 + 1 \neq 0$.	o Ja o Nein
21	Es gibt einen Körper, in dem $1 + 1 = 0$ ist.	o Ja o Nein
30	In jedem Körper K gilt $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ für beliebige $a, b, c, d \in K$.	o Ja o Nein
31	In jedem Körper K gilt $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ für beliebige $a, b \in K$.	o Ja o Nein
40	Es sei $a \in K$, dann hat die Gleichung $x^2 = a$ in K eine Lösung.	o Ja o Nein
41	Es sei $0 \neq a \in K$ und $b \in K$. Dann hat die Gleichung $ax = b$ in K eine Lösung.	o Ja o Nein
50	Es gilt $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ für beliebige $a, b, c \in K$.	o Ja o Nein
51	Es gibt $a, b, c \in K$, so dass $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$ gilt.	o Ja o Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme wahr?	
10	Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösung.	o Ja o Nein
11	Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat eine Lösung.	o Ja o Nein
20	Es gibt lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung.	o Ja o Nein
21	Es gibt keine linearen Gleichungssysteme mit genau einer Lösung.	o Ja o Nein
30	Es gibt lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen.	o Ja o Nein
31	Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.	o Ja o Nein
40	Zwei lineare Gleichungssysteme haben genau dann dieselbe Lösungsmenge, wenn das eine aus dem anderen durch **genau eine** elementare Zeilenumformung hervorgeht.	o Ja o Nein
41	Zwei homogene lineare Gleichungssysteme haben dieselbe Lösungsmenge, wenn das eine aus dem anderen durch **genau zwei** elementare Zeilenumformung hervorgeht.	o Ja o Nein
50	Die Nullspalte ist in der Lösungsmenge jedes beliebigen inhomogenen linearen Gleichungssystems.	o Ja o Nein
51	Die Nullspalte ist in der Lösungsmenge jedes beliebigen linearen Gleichungssystems.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.	
10	Die Matrix A hat 3 Spalten und 2 Zeilen.	o Ja o Nein
11	Die Matrix A hat 3 Zeilen und zwei Spalten.	o Ja o Nein
20	$a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$	o Ja o Nein
21	$a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{12}$	o Ja o Nein
30	A ist die Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems.	o Ja o Nein
31	A ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems.	o Ja o Nein
40	Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 9x_3 = 0$.	o Ja o Nein
41	Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 11x_3 = 0$.	o Ja o Nein
50	Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.	o Ja o Nein
51	Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.	o Ja o Nein

4	Die Koeffizienten der Matrizen in den folgenden Aufgaben seien alle aus $\mathbb{R}$.	
10	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit einer Nullzeile bringen.	o Ja o Nein
11	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform mit zwei Nullzeilen bringen.	o Ja o Nein
20	Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.	o Ja o Nein
21	Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.	o Ja o Nein
30	Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.	o Ja o Nein
31	Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.	o Ja o Nein
40	Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform und habe A eine Nullzeile. Dann hat das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.	o Ja o Nein
41	Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform und habe A weniger Zeilen als Spalten. Dann kann A keine Nullzeile haben.	o Ja o Nein
50	Sei A in Zeilenstufenform und seien die i-te und j-te Zeile für $i \neq j$ verschieden. Vertauscht man die i-te und j-te Zeile, so erhält man eine Matrix, die keine Zeilenstufenform hat.	o Ja o Nein
51	Sei A in Zeilenstufenform. Addiert man die i-te zur j-ten Zeile, wobei $i > j$ ist, so erhält man eine Matrix, die wieder Zeilenstufenform hat.	o Ja o Nein

5 Es sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, verwenden Sie **nur** die Körperaxiome oder Aufgabenteile, die sie bereits bewiesen haben.

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$.

(ii) Gilt $a + b = 0$ mit $a, b \in K$, so ist $b = -a$.

(iii) $-a = (-1) \cdot a$ für alle $a \in K$.

(iv) $-(-a) = a$ für alle $a \in K$.

(v) Gilt $a \cdot b = 1$ mit $a, b \in K$, so ist $b = a^{-1}$.

(vi) Sei $0 \neq a \in K$. Dann ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

(vii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a + b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 0$.

(viii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a \cdot b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 1$.

(ix) Ist $a \cdot b = 0$ mit $a, b \in K$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$ (oder beides).

(x) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

6 Beantworten Sie die folgenden Fragen durch einen Beweis oder ein Beispiel (mit Begründung!).

(i) Gibt es ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \text{ oder } y = 0 \right\}?$$

(ii) Gibt es ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}?$$

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei $$(A,b) := \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$ die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ und $\frac{13}{5} \neq a \in \mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.	
10	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die erste Komponente der Lösung?	
11	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die zweite Komponente der Lösung?	
20	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	
21	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die zweite Komponente der Lösung?	
30	Wenn $a = 3$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	
31	Wenn $a = 3$ ist, was ist dann die zweite Komponente der Lösung?	
40	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	
41	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die erste Komponente der Lösung?	
50	Wenn $a = 4$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?	
51	Wenn $a = 4$ ist, was ist dann das Siebenfache der ersten Komponente der Lösung?	
2	Die Definitionen zur folgenden Aufgabe werden am Montag, dem 12.11.2001 in der Vorlesung behandelt. Welche der folgenden Relationen R sind Äquivalenzrelationen?	
10	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \text{ ist durch 6 teilbar}\}$.	o Ja o Nein
11	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \text{ ist ungerade}\}$.	o Ja o Nein
20	$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a/b = 1\}$.	o Ja o Nein
21	$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b = 1\}$.	o Ja o Nein
30	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a^2 + b^2 = 1\}$.	o Ja o Nein
31	$R = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a - b = 1\}$.	o Ja o Nein
40	$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.	o Ja o Nein
41	$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.	o Ja o Nein
50	$R = \{(A,B) \in \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \times \mathrm{Pot}(\mathbb{N}) \mid \text{es gibt eine bijektive Abbildung von } A \text{ nach } B\}$.	o Ja o Nein

3	Die folgenden Aussagen beziehen sich auf lineare Gleichungssysteme über einem **beliebigen** Körper. Welche sind wahr?	
10	Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat eine Lösung.	o Ja o Nein
11	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat unendlich viele Lösungen.	o Ja o Nein
20	Es gibt keine linearen Gleichungssysteme mit genau einer Lösung, die mehr Gleichungen als Unbekannte haben.	o Ja o Nein
21	Es gibt keine homogenen linearen Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen als Unbekannten, die unendlich viele Lösungen haben.	o Ja o Nein
30	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem, das eine Lösung hat, hat unendlich viele Lösungen.	o Ja o Nein
31	Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mehr als zwei Lösungen.	o Ja o Nein
40	Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen, in dem mindestens $m-2$ der Koeffizienten gleich 0 sind, hat eine Lösung.	o Ja o Nein
41	Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen, in dem mindestens $m-1$ der Koeffizienten gleich 0 sind, hat eine Lösung.	o Ja o Nein
50	Jede Lösung eines linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$, dessen Koeffizienten alle positiv sind, enthält nur positive Zahlen.	o Ja o Nein
51	Jede Lösung eines linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$, dessen Koeffizienten alle negativ sind, enthält nur negative Zahlen.	o Ja o Nein

4	Berechnen Sie für die folgenden Matrizen mit Einträgen aus den reellen Zahlen jeweils eine Zeilenstufenform und geben Sie an, wieviele *Nullzeilen* das Ergebnis hat.	
10	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	
20	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 10 & -19 & -10 & -25 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	
30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
40	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \end{pmatrix}$	
50	$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	
60	$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	
70	$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}$ (magisches Quadrat)	

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

5 Es sei $K = \{0, 1\}$ ein Körper mit zwei Elementen (siehe Vorlesung). Lösen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem über K mit der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus und dokumentieren Sie genau, was Sie tun!
Wieviele Elemente hat die Lösungsmenge?

6 Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bereits bewiesene Ergebnisse dürfen Sie natürlich im Folgenden verwenden.

(i) Ist L die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten über einem Körper K und $s \in K^n$ eine Lösung, dann gilt

$$L = \{s + u \mid u \in L_0\},$$

wobei L_0 die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems ist. (Hierbei ist, wie in der Vorlesung, $s + u$ komponentenweise definiert.)

(ii) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K hat genau dann unendlich viele Lösungen, wenn das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

(iii) Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem über einem Körper K, das mehr Unbekannte als Gleichungen hat, hat unendlich viele Lösungen.

1	Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?	
10	Für jede Menge M gibt es genau eine Relation auf M, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch ist.	o Ja o Nein
11	Für jede Menge M gibt es mindestens eine Relation auf M, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch ist.	o Ja o Nein
20	Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 512 verschiedene Relationen.	o Ja o Nein
21	Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 81 verschiedene Relationen.	o Ja o Nein
30	Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.	o Ja o Nein
31	Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 12^2 verschiedene reflexive Relationen.	o Ja o Nein
40	Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 5 verschiedene Äquivalenzrelationen.	o Ja o Nein
41	Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.	o Ja o Nein
50	Zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge M sind genau dann gleich, wenn jede Äquivalenzklasse bezüglich der ersten Relation auch eine Äquivalenzklasse bezüglich der zweiten ist.	o Ja o Nein
51	Zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge M sind genau dann gleich, wenn jede Äquivalenzklasse bezüglich der ersten Relation in einer Äquivalenzklassen bezüglich der zweiten enthalten ist.	o Ja o Nein
2	Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$ und neutralem Element 1.	
10	G ist genau dann abelsch, wenn G kommutativ ist.	o Ja o Nein
11	Für $g, h \in G$ gilt $gh = hg$.	o Ja o Nein
20	Wenn für ein $a \in G$ und alle $g \in G$ die Gleichung $ag = g$ gilt, so ist $a = 1$.	o Ja o Nein
21	Wenn für $a, g \in G$ die Gleichung $ag = g$ gilt, so ist $a = 1$.	o Ja o Nein
22	Wenn für $a, g \in G$ die Gleichung $ag = g$ gilt, so ist $g = 1$.	o Ja o Nein
30	Für jedes $g \in G$ ist $(g^{-1})^{-1} = g$.	o Ja o Nein
31	Falls für $g \in G$ gilt $(g^{-1})^{-1} = g$, so ist $g = 1$.	o Ja o Nein
40	Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Gruppe mit genau n Elementen.	o Ja o Nein
41	Wenn es nur endlich viele Isomorphismen von G nach G gibt, so hat G nur endlich viele Elemente.	o Ja o Nein
50	Für $g \in G$ ist die Abbildung $l_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ eine Bijektion.	o Ja o Nein
51	Für $g \in G$ ist die Abbildung $r_g : G \to G$, $h \mapsto hg$ ein Isomorphismus.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Das neutrale Element von G und H sei jeweils mit 1 bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
10	Ist $\varphi(x) = 1$, so folgt $x = 1$.	o Ja o Nein
11	Ist $x = \varphi(1)$, so folgt $x = 1$.	o Ja o Nein
20	Aus $x = y \in G$ folgt $\varphi(x) = \varphi(y)$.	o Ja o Nein
21	Aus $\varphi(x) = \varphi(y) \in H$ folgt $x = y$.	o Ja o Nein
30	Gilt für zwei Elemente $x, y \in G$, dass $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1$ ist, so ist $x \cdot y = 1$.	o Ja o Nein
31	Gilt für zwei Elemente $x, y \in G$, dass $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1$ ist, so ist entweder $x = 1$ oder $y = 1$.	o Ja o Nein
40	Die Abbildung $\psi : G \to H$, für die $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ für alle $x \in G$ gilt, ist ein Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
41	Ist H eine abelsche Gruppe, dann ist die Abbildung $\psi : G \to H$, für die $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ für alle $x \in G$ gilt, ein Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
42	Ist G eine abelsche Gruppe, dann ist die Abbildung $\psi : G \to H$, für die $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$ für alle $x \in G$ gilt, ein Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
50	Ist φ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
4	Seien M und N Mengen, $\mathcal{P}$ eine Partition von M und $g : M \to N$ eine Abbildung.	
10	Falls M endlich ist, gibt eine Abbildung $f : M \to M$, so dass die Partition $\mathcal{P}$ genau aus den nicht-leeren Fasern von f besteht.	o Ja o Nein
11	Falls M endlich ist, gibt eine Abbildung $f : M \to M$, so dass die Partition $\mathcal{P}$ genau aus den Fasern von f besteht.	o Ja o Nein
20	Falls M endlich ist, hat $\mathcal{P}$ höchstens soviele Elemente wie M.	o Ja o Nein
21	Falls M endlich ist, hat $\mathcal{P}$ weniger Elemente als M.	o Ja o Nein
30	$\{(x, y) \in M \times M \mid$ es gibt mindestens ein $C \in \mathcal{P}$ mit $\{x, y\} \subseteq C\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.	o Ja o Nein
31	$\{(x, y) \in M \times M \mid$ es gibt $C_x, C_y \in \mathcal{P}$ mit $x \in C_x$ und $y \in C_y\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.	o Ja o Nein
40	Die Fasern von g zu zwei Elementen von N sind entweder gleich oder ihr Durchschnitt ist die leere Menge.	o Ja o Nein
41	Falls die Fasern von g zu zwei Elementen von N ein gemeinsames Element haben, so sind sie gleich.	o Ja o Nein
50	Falls g surjektiv ist, so gibt es eine Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen die Fasern von g sind.	o Ja o Nein
51	Falls g injektiv ist, so gibt es eine Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen die Fasern von g sind.	o Ja o Nein

5 Es sei G eine Gruppe. Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq G$ eine **Untergruppe von** G, wenn sie bezüglich der Multiplikation von G eine Gruppe ist. Zeigen Sie:

(i) Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn folgende Aussage gilt: *Für alle $a \in U$ und $b \in U$, gilt $a \cdot b^{-1} \in U$.*

Sei nun H eine weitere Gruppe und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(ii) Es gilt $\varphi(1) = 1$.

(iii) Es ist $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ für alle $x \in G$.

(iv) Die Menge $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.

6 Seien L, M und N Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für bijektive Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ sind auch $g \circ f$ und f^{-1} bijektiv.

(ii) Die Gruppen S_M und S_N der Bijektionen von M nach M beziehungsweise N nach N sind genau dann isomorph, wenn es eine Bijektion $f : M \to N$ gibt.

(iii) Wenn M genau m Elemente hat, dann hat die Gruppe S_M genau $m!$ Elemente.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = (x_{ij})$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie Q an (für *Quatsch*) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.	
10	$X = C^3A - D$	o Q o 326 o 388
11	$X = D^3B - C$	o Q o 326 o 388
20	$X = CAC$	o Q o -97 o 188
21	$X = DBD$	o Q o -97 o 188
30	$X = CAD + A$	o Q o 180 o 62
31	$X = ABA - 170A$	o Q o 180 o 62
40	$X = DBA - D^3$	o Q o 79 o 18
41	$X = ADB - 4C^2$	o Q o 79 o 18
50	$X = 7BA - 193D^2$	o Q o 0 o 1
51	$X = 4AB - 183C$	o Q o 0 o 1
2	Rechnen Sie jeweils in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und kreuzen Sie einen Vertreter der Ergebnisrestklasse an.	
10	Es sei $n = 37$. Was ist $\overline{17}^2$?	o 10 o 20 o 30
11	Es sei $n = 37$. Was ist $\overline{11}^2$?	o 10 o 20 o 30
20	Es sei $n = 101$. Was ist $\overline{2}^{101}$?	o 2 o 3 o 99
21	Es sei $n = 101$. Was ist $\overline{3}^{101}$?	o 2 o 3 o 99
30	Es sei $n = 6$. Was ist $\overline{2} \cdot \overline{3}$?	o 0 o 1 o 3
31	Es sei $n = 15$. Was ist $\overline{3} \cdot \overline{5}$?	o 0 o 1 o 3
40	Was ist die letzte Dezimalziffer von 2^{100}?	o 1 o 3 o 6
41	Was ist die letzte Dezimalziffer von 3^{100}?	o 1 o 3 o 6
50	Es sei $n = 9$. Was ist $\overline{4444}^{4444}$?	o 4 o 7 o 1
51	Es sei $n = 9$. Was ist $\overline{4444}^{4445}$?	o 4 o 7 o 1

3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe. Mit φ sei die Eulersche Phi-Funktion bezeichnet.	
10	Welche der folgenden Zahlen ist in $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ ein Vertreter für das (multiplikative) Inverse von $\overline{14}$?	o 7 o 8 o 9
11	Welche der folgenden Zahlen ist in $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ ein Vertreter für das (multiplikative) Inverse von $\overline{16}$?	o 7 o 8 o 9
20	Ist $\overline{527}$ in $\mathbb{Z}/1147\mathbb{Z}$ invertierbar?	o Ja o Nein
21	Ist $\overline{5267}$ in $\mathbb{Z}/1147\mathbb{Z}$ invertierbar?	o Ja o Nein
30	Es sei p eine Primzahl. Ist dann $\varphi(p) = p$?	o Ja o Nein
31	Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Ist es richtig, dass genau dann $\varphi(n) = n - 1$ gilt, wenn n eine Primzahl ist?	o Ja o Nein
40	Was ist $\varphi(30)$?	o 8 o 10 o 12
41	Was ist $\varphi(36)$?	o 8 o 10 o 12
50	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (multiplikativ) invertierbar. Ist dann auch a^2 invertierbar?	o Ja o Nein
51	Sei $a^2 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (multiplikativ) invertierbar. Ist dann auch a invertierbar?	o Ja o Nein
4	Sei R ein beliebiger Ring mit Nullelement 0 und Einselement 1.	
10	R hat genau dann nur ein Element, wenn $0 = 1$ gilt.	o Ja o Nein
11	R hat mindestens zwei Elemente.	o Ja o Nein
20	Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper, wenn es keine Nullteiler gibt (das heißt, wenn es keine $x, y \neq \overline{0}$ mit $xy = \overline{0}$ gibt).	o Ja o Nein
21	Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper, wenn n nur durch 1 und n teilbar ist.	o Ja o Nein
30	Es gibt einen Ringisomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
31	Es gibt einen Ringisomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$.	o Ja o Nein
40	R ist ein Körper, wenn R mindestens zwei Elemente hat, R kommutativ ist und es zu jedem Element $0 \neq r \in R$ ein $s \in R$ mit $rs = 1$ gibt.	o Ja o Nein
41	R ist ein Körper, wenn R kommutativ ist und es zu jedem Element $0 \neq r \in R$ ein $s \in R$ mit $rs = 1$ gibt.	o Ja o Nein
50	Eine Aussage, die für jeden Ring gilt, gilt auch für jeden Körper.	o Ja o Nein
51	Eine Aussage, die für jeden kommutativen Ring gilt, gilt auch für jeden Körper.	o Ja o Nein

5 In dieser Aufgabe sei R ein kommutativer Ring, in dem $0 \neq 1$ gilt. Wir betrachten die Menge $R^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R. Sie bildet mit komponentenweiser Addition und Matrizenmultiplikation einen Ring (siehe Vorlesung nächste Woche). Ein **Nullteiler** in einem Ring ist ein Element $x \neq 0$, zu dem ein Element $y \neq 0$ existiert mit $x \cdot y = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass im Fall $n = 2$ ein Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$ genau dann eine Einheit in $R^{2\times 2}$ ist, wenn $ad - bc$ eine Einheit in R ist.

(ii) Wieviele Elemente hat $GL_2(\mathbb{F}_2)$, die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen?

(iii) Der Ring $R^{n\times n}$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.

(iv) Der Ring $R^{n\times n}$ hat für $n \geq 2$ Nullteiler.

6 Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung.

(i) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}$.

(ii) Welche Untergruppen sind ineinander enthalten?

(iii) Wieviele endliche Untergruppen gibt es?

(iv) Welche Untergruppen sind *maximal*, das heisst welche Untergruppen sind echte Untergruppen $M \lneqq \mathbb{Z}$, so dass es keine echte Zwischengruppe $M \lneqq N \lneqq \mathbb{Z}$ gibt?

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W **linear** ist.	
10	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 2x + 1$	o Ja o Nein
11	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 3x$	o Ja o Nein
20	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$	o Ja o Nein
21	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$	o Ja o Nein
30	$K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^2$	o Ja o Nein
31	$K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^3$	o Ja o Nein
40	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f + f$	o Ja o Nein
41	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f - f$	o Ja o Nein
50	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1, 2) \cdot M$	o Ja o Nein
51	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{3\times 2}$, $W := K^{1\times 2}$, $\varphi : M \mapsto (3, 2, 1) \cdot M$	o Ja o Nein
2	Welche der folgenden Aussagen über lineare Abbildungen sind wahr?	
10	Die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung ist linear.	o Ja o Nein
20	Jede Verkettung linearer Abbildungen ist linear.	o Ja o Nein
21	Es gibt zwei lineare Abbildungen, deren Verkettung zwar definiert aber nicht linear ist.	o Ja o Nein
30	Jede Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Homomorphismus.	o Ja o Nein
31	Es gibt eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, die kein $\mathbb{F}_2$-Homomorphismus ist.	o Ja o Nein
40	Jeder $\mathbb{R}$-Homomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist injektiv.	o Ja o Nein
41	Jeder $\mathbb{R}$-Homomorphismus von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
50	Ist die Verkettung zweier Abbildungen zwischen K-Vektorräumen linear, dann sind beide Abbildungen linear.	o Ja o Nein
51	Ist die Verkettung zweier Abbildungen zwischen K-Vektorräumen linear, dann ist mindestens eine der beiden Abbildungen linear.	o Ja o Nein

3	Es seien A und B Matrizen über einem Körper K, so dass $A \cdot B$ definiert ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
10	Die Spalten von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von B.	o Ja o Nein
11	Die Spalten von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von A.	o Ja o Nein
20	Die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von B.	o Ja o Nein
21	Die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von A.	o Ja o Nein
30	Es gilt $A^t \cdot B = (B^t \cdot A)^t$, falls die linke Seite definiert ist.	o Ja o Nein
31	Es gilt $A \cdot B^t = (B \cdot A^t)^t$, falls die rechte Seite definiert ist.	o Ja o Nein
40	Jede Spalte von $A \cdot B$ liegt im Spaltenraum von A.	o Ja o Nein
41	Jede Zeile von $A \cdot B$ liegt im Zeilenraum von B.	o Ja o Nein
50	Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $A \cdot (A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t = A$.	o Ja o Nein
51	Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $(A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t \cdot B = B$.	o Ja o Nein
4	Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen?	
10	$U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist beschränkt}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	o Ja o Nein
11	$U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq 17 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	o Ja o Nein
20	$U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	o Ja o Nein
30	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$	o Ja o Nein
31	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$	o Ja o Nein
40	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$	o Ja o Nein
41	$U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$	o Ja o Nein
50	$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^t\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$	o Ja o Nein
51	$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

5 Es seien K ein Körper und M und N zwei Matrizen aus $K^{m\times n}$. Zeigen Sie:

(i) Wenn N aus M durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht, dann ist der Zeilenraum von M gleich dem Zeilenraum von N.

(ii) Wenn M in Zeilenstufenform ist und N aus M hervorgeht, indem eine Zeile, in der nicht nur Nullen stehen, mit 0 multipliziert wird, dann ist der Zeilenraum von M verschieden vom Zeilenraum von N.

6 Sei K ein Körper. Wir betrachten die Menge $K^{\mathbb{N}_0}$ der Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach K. Für $f, g \in K^{\mathbb{N}_0}$ und $a \in K$ definieren wir:

$$\begin{aligned} f+g: &\quad \mathbb{N}_0 \longrightarrow K, \quad n \mapsto f(n)+g(n) \\ a\cdot f: &\quad \mathbb{N}_0 \longrightarrow K, \quad n \mapsto af(n) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $K^{(\mathbb{N}_0)}$ die Teilmenge der Abbildungen $f \in K^{\mathbb{N}_0}$, für die es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) \neq 0$ gibt.
Schließlich definieren wir für $f, g \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ die Verknüpfung $f \star g \in K^{(\mathbb{N}_0)}$, so dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(f\star g)(n) = \sum_{a,b\in\mathbb{N}_0, a+b=n} f(a)g(b)$.

(i) Zeigen Sie, dass $K^{\mathbb{N}_0}$ bezüglich der oben angegebenen Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $K^{(\mathbb{N}_0)}$ ein Untervektorraum von $K^{\mathbb{N}_0}$ ist, der nicht von endlich vielen Elementen erzeugt wird.

(iii) Zeigen Sie, dass $\star$ tatsächlich eine Verknüpfung auf $K^{(\mathbb{N}_0)}$ definiert. Für welches Element, das wir mit X^0 bezeichnen wollen, gilt $X^0 \star f = f$ für alle $f \in K^{(\mathbb{N}_0)}$?

(iv) Sei $X : \mathbb{N}_0 \longrightarrow K$ die Abbildung mit $1 \mapsto 1$ und $n \mapsto 0$ für $n \neq 1$. Beginnend mit dem Element X^0 aus Teil (iii) definieren wir $X^i \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ rekursiv als $X^{i-1} \star X$ für $i > 0$. Zeigen Sie, dass jedes $f \in K^{(\mathbb{N}_0)}$ eine eindeutige Linearkombination von $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

(v) Zeigen Sie, dass $(K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \star)$ ein Ring ist.

Anmerkung: Der Ring $K^{(\mathbb{N}_0)}$ wird oft mit $K[X]$ bezeichnet und heißt *Polynomring* über K.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es seien K ein Körper, V und W endlich-erzeugte Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. In dieser Aufgabe steht das Wort „Basis“ immer für „geordnete Basis“. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
10	Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basis von W.	o Ja o Nein
11	Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basis von W.	o Ja o Nein
20	Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhängig und φ injektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	o Ja o Nein
21	Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhängig und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig.	o Ja o Nein
30	Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhängig, dann ist (b_1, b_2) linear unabhängig.	o Ja o Nein
31	Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear abhängig, dann ist (b_1, b_2) linear abhängig.	o Ja o Nein
40	Wenn es eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gibt, so dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basis von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	o Ja o Nein
41	Wenn für jede Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gilt, dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basis von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.	o Ja o Nein
50	Wenn φ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	o Ja o Nein
51	Wenn φ surjektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	o Ja o Nein
2	Sind die folgenden Teilmengen der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume linear unabhängig?	
10	$\{x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(5x), x \mapsto \sin(7x)\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$	o Ja o Nein
11	$\{x \mapsto \cos(3x), x \mapsto x^4, x \mapsto \sin(x)\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$	o Ja o Nein
20	$\{(1,1,1), (0,1,1), (-3,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	o Ja o Nein
21	$\{(2,2,2), (1,1,0), (0,0,3)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	o Ja o Nein
30	$\{1, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$	o Ja o Nein
31	$\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$	o Ja o Nein
40	$\{(-1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	o Ja o Nein
41	$\{(0,0,0), (1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$	o Ja o Nein
50	$\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$ für $i \in \mathbb{N}$ und $f_i(n) = 0$ für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?	
10	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	o Ja o Nein
11	Kern $\varphi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	o Ja o Nein
20	Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	o Ja o Nein
21	Kern $\psi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$	o Ja o Nein
30	Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ	o Ja o Nein
31	Bild $\varphi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	o Ja o Nein
40	Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	o Ja o Nein
41	Bild $\psi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$	o Ja o Nein
50	Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$	o Ja o Nein
51	Bild $(\psi \circ \varphi) =$ Kern $(\varphi \circ \psi)$	o Ja o Nein
4	Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:	
10	Ist X linear unabhängig, so ist auch Y linear unabhängig.	o Ja o Nein
11	Ist Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.	o Ja o Nein
20	Ist X linear abhängig, so ist auch Y linear abhängig.	o Ja o Nein
21	Ist Y linear abhängig, so ist auch X linear abhängig.	o Ja o Nein
30	Ist X ein Erzeugendensystem von V, so ist auch Y ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
31	Ist Y ein Erzeugendensystem von V, so ist auch X ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
40	Ist X eine Basis von V, so ist auch Y eine Basis von V.	o Ja o Nein
41	Ist Y eine Basis von V, so ist auch X eine Basis von V.	o Ja o Nein
50	Wenn X eine Basis von $\langle X \rangle$ ist, so gibt es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$, die eine Basis von $\langle Y \rangle$ ist.	o Ja o Nein
51	Wenn es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$ gibt, die eine Basis von $\langle Y \rangle$ ist, so ist X eine Basis von $\langle X \rangle$.	o Ja o Nein

5 Es sei K ein Körper und V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum.

(i) Zeigen Sie, dass jedes endliche Erzeugendensystem $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ von V eine Teilmenge besitzt, die eine Basis von V ist.

(ii) Geben Sie ein Verfahren (Algorithmus) an, mit dem explizit aus einem n-Tupel von Zeilen aus $K^{1\times m}$ eine Basis des Raums gewählt werden kann, der von den Zeilen aufgespannt wird.

(iii) Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Wählen Sie aus der Menge

$$M := \{(1,0,3,2,1), (3,2,-1,-2,1), (1,2,-7,-6,-1), (2,2,2,2,2)\} \subseteq \mathbb{Q}^{1\times 5}$$

eine Teilmenge aus, die eine Basis von $\langle M \rangle$ ist.

6 Es sei K ein Körper und V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum. Weiter seien U und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$ genau dann, wenn für jede geordnete Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U und jede geordnete Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W das Tupel $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von V ist.

(ii) Es gilt:

$$\dim_K(U + W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W).$$

Hinweis: Zählen Sie Vektoren in geeigneten Basen.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1 Es seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -39 \\ 2 & -5 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & -5 & -32 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie jeweils den Rang der angegebenen Matrix.

10	A	
20	B	
30	C	
40	$BA - C$	
50	$BA + C$	
60	$AC^t + B^t$	
70	$C^t - A^t B^t$	

2 Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?

10	Wenn es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.	o Ja o Nein
11	Falls $m = n$ ist und es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.	o Ja o Nein
20	$Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) + 1 = \mathrm{rang}(A, b)$ ist.	o Ja o Nein
21	$Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b) - 1$ ist.	o Ja o Nein
30	Für $c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.	o Ja o Nein
31	Für $0 \neq c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.	o Ja o Nein
40	Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann gibt es $c \in K^{m\times 1}$, so dass $Ax = c$ unlösbar ist.	o Ja o Nein
41	Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann ist $Ax = c$ für alle $c \in K^{m\times 1}$ unlösbar.	o Ja o Nein
50	Für $c = 0$ und $n > m$ hat $Ax = c$ mindestens $n - m$ Lösungen.	o Ja o Nein
51	Für $c = 0$ hat $Ax = c$ mindestens $\lvert n - m\rvert$ (Absolutbetrag) Lösungen.	o Ja o Nein

3	Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.	
10	K^2 für $q = 13$.	
11	K^3 für $q = 5$.	
20	Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^4 für $q = 3$.	
21	Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^3 für $q = 5$.	
30	Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{3\times 2}$ vom Rang 1 ist und $q = 2$.	
31	Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{2\times 3}$ vom Rang 2 ist und $q = 3$.	
40	Die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen in $K^{2\times 2}$ für $q = 5$.	
41	Die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen in $K^{2\times 2}$ für $q = 3$.	
50	Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 13$.	
51	Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 17$.	
4	Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper K. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
10	Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich ihrem Spaltenrang.	n.a., evt.: o Ja o Nein
20	Eine $n \times n$-Matrix mit vollem Rang läßt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix überführen.	n.a., evt.: o Ja o Nein
30	Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Spaltenraums.	o Ja o Nein
40	Der Spaltenrang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Zeilenraums.	o Ja o Nein
50	Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist gleich der Differenz der Anzahl der Unbekannten und dem Rang der Matrix A.	o Ja o Nein
60	Es sei A eine quadratische Matrix. Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix $-A$ invertierbar ist.	o Ja o Nein
70	Für $0 \neq c \in K$ und eine Matrix A haben A und $c \cdot A$ den gleichen Rang.	o Ja o Nein
80	Eine invertierbare $n \times n$-Matrix hat den Rang n.	n.a., evt.: o Ja o Nein

5	Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Dabei sei V endlich-dimensional und W nicht der Nullvektorraum. (i) Zeigen Sie, dass ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ (mit $n \in \mathbb{N}$) von Vektoren aus V genau dann eine geordnete Basis von V ist, wenn folgendes gilt: Zu jedem Tupel $(w_1, \ldots, w_n)$ von Vektoren aus W gibt es genau eine lineare Abbildung φ von V nach W mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq n$. (ii) Sei K nun ein endlicher Körper mit q Elementen und $\dim_K V = n$. Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Basen von V. (iii) Sei K wie in (ii). Bestimmen Sie $\|GL_n(K)\|$.
6	Sei K ein Körper, $A \in K^{k \times m}$ und $B \in K^{m \times n}$. (i) Sei $m = 1$. Berechnen Sie $\mathrm{rang}(A \cdot B)$. (ii) Zeigen Sie: $\mathrm{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\mathrm{rang}\ A, \mathrm{rang}\ B\}$. (iii) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $\mathrm{rang}(A \cdot B) < \min\{\mathrm{rang}\ A, \mathrm{rang}\ B\}$ ist.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1 Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}.$$

Weiter seien die geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von V und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.

10	Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
11	Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
20	Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
21	Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
30	Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
31	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
40	Der Eintrag in der 3. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
41	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
50	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	
51	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 4. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet	

2	Es seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	o Ja o Nein
11	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	o Ja o Nein
20	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	o Ja o Nein
21	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	o Ja o Nein
30	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear unabhängig.	o Ja o Nein
31	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.	o Ja o Nein
40	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.	o Ja o Nein
41	Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.	o Ja o Nein
50	Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $v_1 = v_2$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.	o Ja o Nein
51	Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $v_1 = v_2$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) = 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear unabhängig.	o Ja o Nein

3	Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen von W. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	Jede invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ ist Basiswechselmatrix von V.	o Ja o Nein
11	Jede Matrix $T \in K^{n\times n}$ ist Basiswechselmatrix von V.	o Ja o Nein
20	Falls $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus den gleichen Elementen von V gebildet werden, so sind alle Einträge der zugehörigen Basiswechselmatrix von V entweder 0 oder 1.	o Ja o Nein
21	Falls alle Einträge der Basiswechselmatrix von V zu den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ entweder 0 oder 1 sind, so bestehen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus der gleichen Menge von Vektoren.	o Ja o Nein
30	Es gilt $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.	o Ja o Nein
31	Es gilt $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.	o Ja o Nein
40	Es gibt eine Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\psi)$ ist.	o Ja o Nein
41	Es gibt eine invertierbare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\psi)$ ist.	o Ja o Nein
50	Jede Basiswechselmatrix von W ist quadratisch und invertierbar.	o Ja o Nein
51	Jede Basiswechselmatrix von V ist quadratisch und invertierbar.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

4	Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} := (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.	
10	Ist $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht.	o Ja o Nein
11	Ist $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Zeilen vertauscht.	o Ja o Nein
20	Ist $\mathcal{C}' = (w_2, w_1, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht.	o Ja o Nein
21	Ist $\mathcal{C}' = (w_2, w_1, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Zeilen vertauscht.	o Ja o Nein
30	Ist $\mathcal{C}' = (w_1 + w_2, w_2, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die erste Zeile von der zweiten subtrahiert.	o Ja o Nein
31	Ist $\mathcal{C}' = (w_1 + w_2, w_2, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die zweite Zeile zur ersten addiert.	o Ja o Nein
40	Ist $\mathcal{B}' = (v_1, v_2 - v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die erste Spalte von der zweiten subtrahiert.	o Ja o Nein
41	Ist $\mathcal{B}' = (v_1, v_2 - v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die zweite Spalte zur ersten addiert.	o Ja o Nein
50	Ist $\mathcal{B}' = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man dieselben Spalten in umgekehrter Reihenfolge schreibt.	o Ja o Nein
51	Ist $\mathcal{B}' = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man dieselben Zeilen in umgekehrter Reihenfolge schreibt.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

5	Sei K ein Körper und seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $r \leq \min\{\dim_K(V), \dim_K(W)\}$, sowie (geordnete) Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W, so dass die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die folgende Block-Form hat: $$\left(\begin{array}{c\|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
6	Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit Basen $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ beziehungsweise $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, für die gilt: $$\begin{array}{rcl} \varphi(b_1) & = & c_1 - c_2 \\ \varphi(b_2) & = & c_2 - c_3 \\ \varphi(b_3) & = & c_3 - c_4 \\ \varphi(b_4) & = & \sqrt{5}c_1 - \sqrt{5}c_2 + c_4 - c_5 \\ \varphi(b_5) & = & -\sqrt{5}c_1 + \sqrt{5}c_2 + c_5 \end{array}$$ Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung φ^{-1} bezüglich der oben angegebenen Basen.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$. (Die Elemente von $\mathbb{F}_{11}$ werden also durch ihre kleinsten nicht-negativen Restklassenvertreter beschrieben.)	
10	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	
11	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	
20	$\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$	
30	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	
31	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	
40	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	
41	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 10 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	
50	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	
51	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}.	
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
31	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
40	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
41	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
50	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	o +1 o -1
51	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	o +1 o -1

3	Es sei σ die folgende Permutation von 9 Punkten: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. In den folgenden Fragen ist jeweils ein Produkt von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable i anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit das Produkt gleich σ ist.	
10	$(1\ 3)\ (9\ 3)\ (9\ 8)\ (5\ 8)\ (8\ 2)\ (6\ 8)\ (7\ i)$	
11	$(9\ 8)\ (2\ 5)\ (3\ 8)\ (1\ 8)\ (8\ 7)\ (5\ 7)\ (6\ i)$	
20	$(1\ 2)\ (2\ 5)\ (3\ 9)\ (i\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 6)\ (1\ 6)$	
21	$(5\ 7)\ (2\ 7)\ (6\ 7)\ (i\ 8)\ (8\ 5)\ (1\ 3)\ (3\ 9)$	
30	$(1\ 2)\ (i\ 7)\ (2\ 5)\ (1\ 6)\ (1\ 7)\ (3\ 9)\ (8\ 9)$	
31	$(i\ 2)\ (3\ 7)\ (2\ 5)\ (1\ 6)\ (1\ 7)\ (3\ 9)\ (8\ 9)$	
40	$(i\ 5)\ (1\ 5)\ (9\ 8)\ (3\ 8)\ (6\ 2)\ (8\ 7)\ (2\ 4)\ (7\ 4)\ (1\ 4)$	
41	$(4\ 5)\ (1\ 5)\ (9\ 8)\ (3\ 8)\ (6\ 2)\ (8\ 7)\ (2\ 4)\ (7\ i)\ (1\ 4)$	
50	$(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 5)\ (i\ 8)\ (8\ 7)\ (7\ 6)\ (3\ 6)$	
51	$(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 5)\ (9\ 8)\ (8\ 7)\ (7\ i)\ (3\ 6)$	
4	Es sei K ein Körper und $M, N \in K^{n \times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Einträge der Matrix M seien mit $m_{i,j}$ für $(1 \leq i, j \leq n)$ bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?	
10	Ist M eine untere Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante von M gleich dem Produkt der Diagonalelemente.	o Ja o Nein
11	Ist ein Diagonaleintrag von M gleich 0, dann ist die Determinante von M auch gleich 0.	o Ja o Nein
20	Es gilt $(\det M) \cdot (\det N) = \det(M \cdot N)$.	o Ja o Nein
21	Es gilt $(\det M) + (\det \mathrm{N}) = \det(M + N)$.	o Ja o Nein
30	Ist $m_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$, dann ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$.	o Ja o Nein
31	Ist $m_{i,j} = 0$ für $i + j \leq n$, dann ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$.	o Ja o Nein
40	Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M auch entweder 0 oder 1.	o Ja o Nein
41	Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M in der Menge $\{0, 1, -1\}$.	o Ja o Nein
50	Sind zwei Zeilen von N gleich, so ist $\det N = 0$.	o Ja o Nein
51	Ist eine Zeile von N das Negative einer anderen Zeile von N, dann ist $\det N = 0$.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

5 Sei für einen kommutativen Ring R die Abbildung $D: R^{n\times n} \to R$, durch die folgende Formel gegeben:

$$D((a_{ij})) = \sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Abbildung multilinear ist (siehe Punkt (3.8)(1) und den Beweis von Satz 3.11 aus der Vorlesung).

(ii) Wie ändert sich die Determinante bei den einzelnen elementaren Umformungen einer Matrix?

6 Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass für beliebige Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

Bemerkung: Diese Determinante heißt **Vandermonde'sche Determinante**.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei K ein beliebiger Körper und $K[X]$ der Polynomring über K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	Zwei verschiedene Polynome in $K[X]$ vom Grad 1 sind teilerfremd.	o Ja o Nein
11	Zwei verschiedene normierte Polynome in $K[X]$ vom Grad 1 sind teilerfremd.	o Ja o Nein
20	Es sei $0 \neq a \in K$. Dann gilt: Zwei Polynome $f, g \in K[X]$ sind genau dann teilerfremd in $K[X]$, wenn es Elemente $\lambda, \mu \in K[X]$ gibt mit $\lambda f + \mu g = a$.	o Ja o Nein
21	Es sei $a \in K$. Dann gilt: Zwei Polynome $f, g \in K[X]$ sind genau dann teilerfremd in $K[X]$, wenn es Elemente $\lambda, \mu \in K[X]$ gibt mit $\lambda f + \mu g = a$.	o Ja o Nein
30	In $K[X]$ gibt es irreduzible Polynome.	o Ja o Nein
31	In $K[X]$ gibt es Polynome, die nicht irreduzibel sind.	o Ja o Nein
40	Wenn ein Polynom $f \in K[X]$ unendlich viele Nullstellen hat, dann ist f das Nullpolynom.	o Ja o Nein
41	Jedes Polynom $0 \neq f \in K[X]$ hat nur endlich viele Nullstellen.	o Ja o Nein
50	Jedes Polynom hat eine Nullstelle in K.	o Ja o Nein
51	Ein Polynom in $K[X]$, das keine Nullstelle hat, hat mindestens den Grad 2.	o Ja o Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über Polynome richtig?	
10	Das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel.	o Ja o Nein
11	Das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel.	o Ja o Nein
20	Teilt man in $\mathbb{F}_2[X]$ das Polynom $X^4 + X^2 + X + 1$ mit Rest durch $X^2 + X + 1$, so bleibt als Rest X.	o Ja o Nein
21	Teilt man in $\mathbb{F}_2[X]$ das Polynom $X^4 + X^3 + X + 1$ mit Rest durch $X^2 + X + 1$, so bleibt als Rest 1.	o Ja o Nein
30	In $\mathbb{F}_2[X]$ ist $(X^2+X+1)\cdot(X+1)\cdot X$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von $X^4 + X$.	o Ja o Nein
31	In $\mathbb{F}_2[X]$ ist $(X^2+X+1)\cdot(X^2+X)$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von $X^4 + X$.	o Ja o Nein
40	Das Polynom $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.	o Ja o Nein
41	Das Polynom $X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.	o Ja o Nein
50	Das Bild von $Y^2 - 2Y - 15$ unter dem Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{Q}[Y] \to \mathbb{Q}, Y \mapsto 5$ ist 0.	o Ja o Nein
51	Das Bild von $Y^2 - 2Y - 15$ unter dem Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{Q}[Y] \to \mathbb{Q}, Y \mapsto 2$ ist 0.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $A \cdot \tilde{A} \neq 0$ ist ($\tilde{A}$ ist die zu A komplementäre Matrix).	o Ja o Nein
20	Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K^*$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
21	Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K^*$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.	o Ja o Nein
30	Die Abbildung $\det : K^{n \times n} \to K$ ist ein K-Algebren-Homomorphismus.	n.a., evt.: o Ja o Nein
40	Sind zwei Zeilen von A linear abhängig, dann ist $\det(A) = 0$.	o Ja o Nein
41	Sind zwei Spalten von A linear abhängig, dann ist $\det(A) = 0$.	o Ja o Nein
50	Ist A eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann auch A^{-1}.	o Ja o Nein
51	Ist A eine invertierbare untere Dreiecksmatrix, dann auch A^{-1}.	o Ja o Nein
60	Es sei $K = \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist $a_{ij} \notin \mathbb{Q}$ für ein Paar (i, j), dann ist auch $\det(A) \notin \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
4	Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	$A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}^{n \times n}$, wenn $\det(A) \in \{1, -1\}$ ist.	o Ja o Nein
11	$A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}^{n \times n}$, wenn $\det(A) = 1$ ist.	o Ja o Nein
20	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar und $A^t = A^{-1}$. Dann ist $\det(A) = 1$.	o Ja o Nein
21	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar und $A^t = A^{-1}$. Dann ist $\det(A) \in \{1, -1\}$.	o Ja o Nein
30	Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Sind alle $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, dann gilt: $A^{-1} = \left(\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\right)$ mit gewissen $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $c_{ij} \mid \det(A)$.	o Ja o Nein
40	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ invertierbar.	o Ja o Nein
41	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $\det(A) = 1$.	o Ja o Nein
50	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $\det(A) \in \{1, -1\}$.	o Ja o Nein
51	Gilt für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, dass in jeder Zeile genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, dann ist $\det(A) \in \{1, 0, -1\}$.	o Ja o Nein

5	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $0 \neq f \in K[X]$ mit $\deg(f) \leq n^2$, für das $f(A) = 0 \in K^{n\times n}$ ist.
6	Es sei K ein Körper und $\mathcal{P}(K)$ die Menge der Polynomfunktionen, also $$\mathcal{P}(K) := \left\{ f : K \to K, k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \,\middle|\, \text{für ein } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und gewisse } a_i \in K, 0 \leq i \leq n \right\}.$$ Zeigen Sie: (i) $\mathcal{P}(K)$ mit dem üblichen, punktweisen Produkt $(f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k)$ für $f, g \in \mathcal{P}(K)$ und $k \in K$ ist eine K-Algebra. (ii) Es existiert ein surjektiver K-Algebren-Homomorphismus $\alpha : K[X] \to \mathcal{P}(K)$. (iii) Der Homomorphismus α ist genau dann bijektiv, wenn K unendlich viele Elemente enthält.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $1 \leq \dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
10	Für jedes $a \in K$ gibt es einen Endomorphismus von V mit Eigenwert a.	o Ja o Nein
11	Es gibt ein Element $a \in K$, das nicht Eigenwert eines Endomorphismus von V ist.	o Ja o Nein
20	φ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	o Ja o Nein
21	φ hat n verschiedene Eigenwerte.	o Ja o Nein
30	Falls $K = \mathbb{R}$ und $n = 5$ ist, so hat φ einen Eigenwert.	o Ja o Nein
31	Falls $K = \mathbb{R}$ und $n = 6$ ist, so hat φ einen Eigenwert.	o Ja o Nein
40	Ist 0 einziger Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.	o Ja o Nein
41	Ist 1 einziger Eigenwert, so ist φ die Identität.	o Ja o Nein
50	Sei $K = \mathbb{C}$. Falls mit jedem Eigenwert a von φ auch $2a$ ein Eigenwert von φ ist, dann ist $\varphi = 0$.	o Ja o Nein
2	Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Weiter sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ und χ_φ sein charakteristisches Polynom. Außerdem sei $B \in K^{n \times n}$ und χ_B ihr charakteristisches Polynom. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?	
10	Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = v$.	o Ja o Nein
11	Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$.	o Ja o Nein
20	Wenn für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $\chi_\varphi = \chi_A$, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.	o Ja o Nein
30	Wenn φ nicht bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) = 0$.	o Ja o Nein
31	Wenn φ bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.	o Ja o Nein
40	Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat die Menge der Nullstellen von χ_B genau n Elemente.	o Ja o Nein
41	Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat χ_B mindestens eine Nullstelle.	o Ja o Nein
50	Jedes Polynom vom Grad n ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.	o Ja o Nein
51	Jedes normierte Polynom vom Grad n ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.	o Ja o Nein

3	Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?	
10	Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$, dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.	o Ja o Nein
11	Jede Begleitmatrix eines Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad größer als 1 ist diagonalisierbar.	o Ja o Nein
20	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n\times 1}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat.	o Ja o Nein
21	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von A mit $v_i \in K^{n\times 1}$ existiert, das linear unabhängig ist.	o Ja o Nein
30	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = AT$.	o Ja o Nein
31	Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = TA$.	o Ja o Nein
40	Jede quadratische Nullmatrix ist diagonalisierbar.	o Ja o Nein
41	Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.	o Ja o Nein
50	Jede quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

4	Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen über Eigenvektoren richtig?	
10	Der Nullvektor ist Eigenvektor von φ.	o Ja o Nein
11	Der Nullvektor ist genau dann Eigenvektor von φ, wenn φ die Nullabbildung ist.	o Ja o Nein
20	Wenn die Dimension von V gleich $n \geq 2$ ist und ein linear unabhängiges $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von Eigenvektoren von φ existiert, dann gibt es auch ein linear unabhängiges n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von φ.	o Ja o Nein
21	Wenn die Dimension von V mindestens 2 ist und φ einen Eigenvektor besitzt, dann hat φ mindestens 2 linear unabhängige Eigenvektoren.	o Ja o Nein
30	Der Endomorphismus φ hat mindestens einen Eigenvektor.	o Ja o Nein
31	Es gibt einen Endomorphismus φ, der keinen Eigenvektor besitzt.	o Ja o Nein
40	Die Summe zweier Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten ist ein Eigenvektor von φ.	o Ja o Nein
41	Die Differenz zweier Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten ist ein Eigenvektor von φ.	o Ja o Nein
50	Jede Linearkombination von zwei Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert ist ein Eigenvektor.	o Ja o Nein
51	Die Summe zweier Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert ist ein Eigenvektor.	o Ja o Nein

5	Gegeben sei die Matrix $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$ Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenräume von A.
6	Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen, so dass A genau n verschiedene Eigenwerte hat und $AB = BA$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ gibt, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ beide Diagonalgestalt haben.

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
10	Jedes Polynom ist Minimalpolynom einer Matrix.	o Ja o Nein
11	Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist Minimalpolynom einer Matrix.	o Ja o Nein
20	Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist X.	o Ja o Nein
21	Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das Nullpolynom.	o Ja o Nein
22	Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das konstante Polynom 1.	o Ja o Nein
30	Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist $X - 1$.	o Ja o Nein
31	Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist gleich dem konstanten Polynom 1.	o Ja o Nein
40	Das Minimalpolynom einer Matrix ist irreduzibel.	o Ja o Nein
41	Das Minimalpolynom einer Matrix zerfällt in Linearfaktoren.	o Ja o Nein
50	Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein
51	Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.	o Ja o Nein
2	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?	
10	Jedes Polynom ist charakteristisches Polynom einer Matrix.	o Ja o Nein
11	Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist charakteristisches Polynom einer Matrix.	o Ja o Nein
20	Ist $A^2 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein
21	Ist $A^2 = A$, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein
30	Ist $K = \mathbb{C}$ und $A^4 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein
40	Das charakteristische Polynom von A ist ein Teiler des Minimalpolynoms.	o Ja o Nein
41	Das Minimalpolynom von A ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms.	o Ja o Nein
50	Ist $A^2 \neq 0$ und sind A und A^2 linear abhängig, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein
51	Falls A und A^2 linear abhängig sind, dann ist A diagonalisierbar.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Gerhard Hiß, Dr. Frank Lübeck, Max Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Bilinearformen.	
10	Ist das Standard-Skalarprodukt $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ symmetrisch?	o Ja o Nein
11	Besteht das Bild des Standard-Skalarproduktes $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ genau aus den nicht-negativen reellen Zahlen?	o Ja o Nein
20	Eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *nicht ausgeartet*, falls es zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein $w \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $(v,w) \neq 0$. Gibt es für $n = 2$ nicht ausgeartete Bilinearformen, so dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $(v,v) = 0$ gilt?	o Ja o Nein
21	Eine Bilinearform $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *nicht ausgeartet*, falls es zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein $w \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $(v,w) \neq 0$. Gibt es für $n = 2$ nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen, so dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $(v,v) = 0$ gilt?	o Ja o Nein
30	Bilden die Sesquilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ einen $\mathbb{C}$-Vektoraum der Dimension n^2?	o Ja o Nein
31	Bilden die Sesquilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ einen $\mathbb{C}$-Vektoraum der Dimension $2n$?.	o Ja o Nein
40	Ist für $v \in \mathbb{C}^n$ die Abbildung $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $w \longmapsto \langle v,w \rangle$ linear?	o Ja o Nein
41	Ist für $v \in \mathbb{C}^n$ die Abbildung $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $w \longmapsto \langle w,v \rangle$ linear?	o Ja o Nein
50	Gibt es injektive Bilinearformen?	o Ja o Nein
51	Ist jede Bilinearform surjektiv?	o Ja o Nein

4	Tragen Sie die gefragten Zahlen in die vorgesehenen Felder ein.	
10	Sei $M = \begin{pmatrix} -22 & 6 & 12 & 3 \\ -56 & 16 & 28 & 7 \\ -32 & 8 & 18 & 4 \\ 48 & -12 & -24 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times4}$. Teilen Sie das charakteristische Polynom von M durch das Minimalpolynom von M und geben sie eine Nullstelle des Ergebnisses an.	
11	Sei $M = \begin{pmatrix} -23 & 6 & 12 & 3 \\ -56 & 15 & 28 & 7 \\ -32 & 8 & 17 & 4 \\ 48 & -12 & -24 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times4}$. Teilen Sie das charakteristische Polynom von M durch das Minimalpolynom von M und geben sie eine Nullstelle des Ergebnisses an.	
20	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1 \\ 2 & -2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times3}$. Setzen Sie $3 \in \mathbb{Q}$ in das charakteristische Polynom von M ein und geben Sie das (gekürzte) Ergebnis an.	
21	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1 \\ 2 & -2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times3}$. Setzen Sie $-3 \in \mathbb{Q}$ in das charakteristische Polynom von M ein und geben Sie das (gekürzte) Ergebnis an.	
30	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Wieviele $a \in \mathbb{R}$ gibt es, so dass der Rang von $aE_3 - M$ kleiner als drei ist?	
31	Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}$. Wieviele $a \in \mathbb{C}$ gibt es, so dass der Rang von $aE_3 - M$ kleiner als drei ist?	
40	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_2^{2\times2}$ haben genau zwei Eigenwerte in $\mathbb{F}_2$?	
41	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_2^{2\times2}$ haben keinen Eigenwert in $\mathbb{F}_2$?	
50	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_{17}^{4\times4}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	
51	Wieviele Matrizen $M \in \mathbb{F}_{23}^{3\times3}$ haben ein Minimalpolynom vom Grad 1?	

5 Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Mit $\chi_A \in K[X]$ sei das charakteristische Polynom von A bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) Wenn $a \in K$ ist und die Dimension $\dim_K(V(a, A)) = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$ ist, dann gilt $(X - a)^m \mid \chi_A$.

(ii) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt und für alle Nullstellen a von χ_A gilt, dass die Dimension $\dim_K(V(a, A))$ gleich der Vielfachheit von a als Nullstelle von χ_A ist.

6 Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Weiter sei $\beta : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\beta(v + v', v + v') + \beta(v - v', v - v') = 2 \cdot (\beta(v, v) + \beta(v', v'))$ für alle $v, v' \in V$.

(ii) Ist $K = \mathbb{R}$, so gilt $\beta(v, v') = \frac{1}{2}(\beta(v + v', v + v') - \beta(v, v) - \beta(v', v'))$ für alle $v, v' \in V$.

(iii) Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $\beta(v, v') = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \beta\left(v + i^k \cdot v', v + i^k \cdot v'\right)$ für alle $v, v' \in V$.

(iv) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, für die $\beta(v_j, v_k) = \delta_{j,k}$ (Kronecker-Delta) für $1 \leq j, k \leq n$ gilt, dann gilt:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \beta(v, v_k) \cdot v_k \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Bemerkung: Die Formel in (i) wird **Parallelogrammidentität** und die Formeln in (ii) und (iii) werden **Polarisationsidentität** genannt.
Was hat die Formel in (i) mit Parallelogrammen zu tun?