

#### 4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 8.5. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

##### Aufgabe 1

5+5 Punkte

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Einheitsresolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\begin{aligned} &(\neg Z \vee \neg U \vee Y) \wedge (\neg Z \vee W \vee \neg V) \wedge U \wedge (Z \vee \neg U) \wedge \neg X \\ &\wedge (V \vee \neg Y \vee \neg Z \vee \neg U) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee X \vee \neg W) \end{aligned}$$

- (b) Beweisen Sie, dass der Einheitsresolutionskalkül im Allgemeinen nicht vollständig ist: Geben Sie eine unerfüllbare (Nicht-Horn-)Klauselmeng an, von der Sie beweisen können, dass  $\square$  nicht per Einheitsresolution aus ihr ableitbar ist.

##### Aufgabe 2

4+4+2 Punkte

Die Quantifizierte Aussagenlogik (QAL) erweitert AL um Existenz- und Allquantoren über Aussagenvariablen, so dass Formeln der Art  $\exists X_i \psi(X_1, \dots, X_n)$  und  $\forall X_i \psi(X_1, \dots, X_n)$  gebildet werden können, welche “es gibt eine Interpretation für  $X_i$ , so dass  $\psi$ ” bzw. “für alle Interpretationen von  $X_i$  gilt  $\psi$ ” ausdrücken sollen.

- (a) Geben sie präzise induktive Definitionen für die Syntax und die Semantik von QAL an (analog zu den Definitionen für AL).
- (b) Zeigen Sie, dass jede Formel aus QAL zu einer Formel aus AL äquivalent ist.
- (c) Überlegen Sie, welche Auswirkung die Transformation einer QAL-Formel in eine äquivalente AL-Formel auf die Formellänge hat.

##### Aufgabe 3

2+3+1+4 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *P-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln  $C_1$  und  $C_2$  gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Dabei heißt eine Klausel *positiv*, falls sie kein negatives Literal enthält.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmeng ohne positive Klauseln erfüllbar ist.
- (b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmeng

$$K = \{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

- (c) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmeng  $K$  die leere Klausel  $\square$  durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist  $K$  unerfüllbar.

- (d) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge  $K$  unerfüllbar ist, so lässt sich  $\square$  aus  $K$  durch P-Resolution ableiten.

*Hinweis:* Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in  $K$  vorkommenden Aussagenvariablen. Betrachten Sie dabei die Verteilung der Klauseln auf Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  dementsprechend, ob eine Klausel eine gegebene Variable positiv, negativ oder gar nicht enthält.