Professor Dr.-Ing. Stefan Kowalewski
Dipl.-Inform. Andreas Polzer
Dipl.-Inform. Ralf Mitsching

Aachen, 02. November 2006
SWS: V2/Ü2, ECTS: 4

Einführung in die Technische Informatik

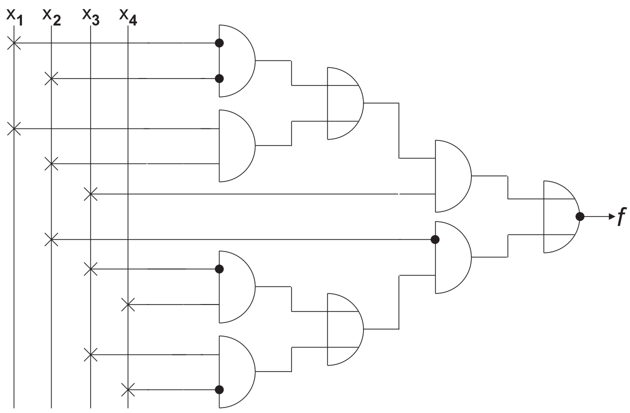
WS 2006/2007

Blatt 2: Multiplexer, Demultiplexer und Minimierung Boolescher Funktionen

Ihre Lösung zu den mit ($\star$) gekennzeichneten Übungen sollen Sie am **10.11.2006** in der Übung abgeben. Die Bearbeitung der Aufgaben in Lerngruppen ist sinnvoll. Bitte geben Sie nur eine Lösung pro Lerngruppe ab.

Aufgabe 1: ($\star$) Minimierung Boolescher Funktionen

Gegeben sei das folgende Schaltnetz zur Realisierung einer Booleschen Funktion f.



a) Bestimmen Sie die DNF von f.

b) Minimieren Sie die DNF von f durch algebraische Vereinfachung unter Ausnutzung der Resolutionsregel $\phi\alpha\psi + \phi\overline{\alpha}\psi = \phi\psi$ und der Absorptionsregel $\phi\alpha\psi + \alpha = \alpha$ (Verschmelzungsgesetz), d. h., bestimmen Sie für die Funktion eine „einfachste“ disjunktive Form.[1]

Beispiel Resolutionsregel: $x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2\overline{x}_4 = x_1x_2 + x_1x_2\overline{x}_4$.
Beispiel Absorptionsregel: $x_1x_2 + x_1x_2\overline{x}_4 = x_1x_2$.

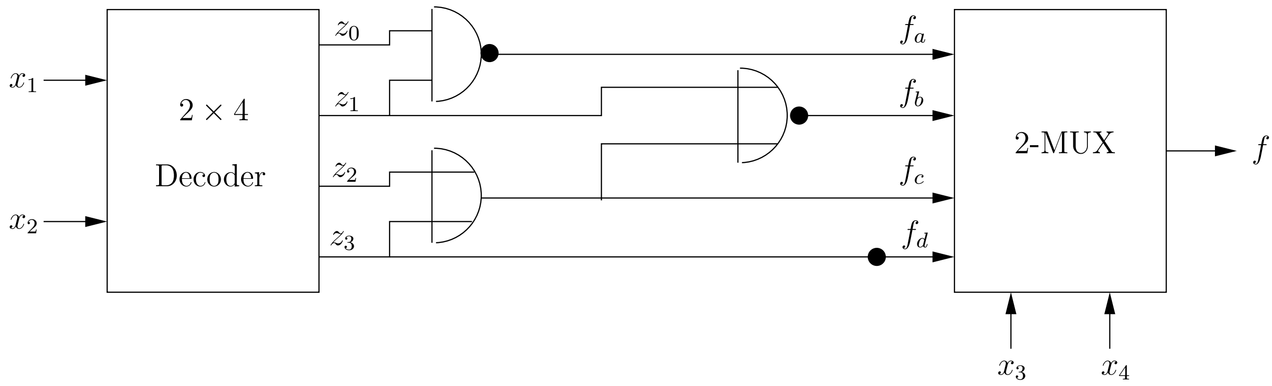
Wichtiger Hinweis: Nutzen Sie stets alle Resolutionsmöglichkeiten!

Beispiel: $x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = x_1x_2 + x_1\overline{x}_3$, denn wegen $\alpha = \alpha + \alpha$ gilt
$x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = x_1x_2 + x_1\overline{x}_3$.
(Natürlich gilt auch $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 = x_1x_2 + x_1\overline{x}_3$.)

c) Zeichnen Sie ein Schaltnetz für Ihre Lösung des vorherigen Aufgabenteils.
Dabei dürfen Sie Gatter mit beliebigem Fan-In verwenden (also nicht nur zweistellige).

[1]Eine disjunktive Form ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, wobei ein Literal eine Variable oder deren Negation ist.

Aufgabe 2: Realisierung einer Funktion mittel Decoder und 2-MUX
Gegeben sei das folgende Schaltnetz zur Realisierung einer 4-stelligen Booleschen Funktion f.



a) Stellen Sie zuerst die Funktionstabelle für die vier 2-stelligen Booleschen Funktionen f_a, f_b, f_c und f_d auf, deren Funktionswerte an den Dateninputs des MUX anliegen.

b) Geben Sie nun die Funktionstabelle für die durch das gesamte Schaltnetz realisierte 4-stellige Boolesche Funktion f an.

c) Bestimmen Sie die einschlägigen Indizes von f.

Aufgabe 3: (⋆) Realisierung Boolescher Funktion mittels komplexer Bausteine
Sei $f : B^4 \rightarrow B$ die Boolesche Funktion mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ gdw. $(x_1x_2x_3x_4)_2$ durch 4 oder 5 teilbar ist. (Beachten Sie: 0 ist durch jede Zahl teilbar.)

a) Skizzieren Sie eine Realisierung von f mittels eines 3-MUX.

b) Skizzieren Sie eine Realisierung von f mittels eines 4×16-Decoders.

c) Skizzieren Sie eine Realisierung von f mittels eines 2×4-Decoders, eines 2-MUX und 4 ODER-Gatter.

Aufgabe 4: (⋆) Realisierung mittels d-MUX
Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass sich jede d-stellige Boolesche Funktion mit einem $d-1$-MUX realisieren lässt ($d \geq 2$). Ein $d-1$-MUX ist sogar in der Lage, einige $d+1$-stellige Boolesche Funktionen darzustellen.

a) Sei f die 4-stellige Boolesche Funktion mit den einschlägigen Indizes $0, 1, 8, 10, 14, 15$. Zeigen Sie, dass sich f mit einem 2-MUX realisieren lässt indem Sie diesen zeichnen. Wählen Sie dabei x_1 und x_2 als Steuerleitungen.
Hinweis: Stellen Sie zuerst die entsprechende Funktionstabelle auf.

b) Gegeben sei die 3-stellige Boolesche Funktion f mit den einschlägigen Indizes $1, 2, 3, 5$. Zeigen Sie, dass sich f mit einem 1-MUX realisieren lässt indem Sie diesen zeichnen. Diesmal müssen Sie die Steuerleitung selber wählen.

c) Geben Sie eine 3-stellige Boolesche Funktion f an, die sich *nicht* allein mit einem 1-MUX realisieren lässt. Welche Eigenschaft muß eine d-stellige Boolesche Funktion haben, um mittels eines $d-2$-MUX darstellbar zu sein?

Aufgabe 5: Ripple-Carry-Addiernetz

a) In unserem Lehrbuch[2] (Sie benötigen das Buch nicht, um diese Aufgabe lösen zu können.) werden folgende Überlegungen zur Schaltzeit eines 4-stelligen Ripple-Carry-Addiernetzes angestellt:

> Jedes Gatter (also AND-, OR-Gatter und Inverter) schaltet in 10 psec $= 10^{-11}$ sec. Ein Halbaddierer liefert seine beiden Outputs nach 30 psec und ein Volladdierer nach 70 psec. Ein A_4 braucht folglich (70+70+70+30) psec = 240 psec.

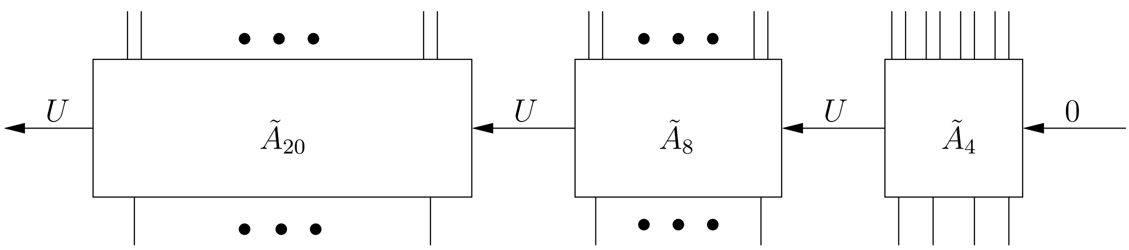
Diese Abschätzung ist nur recht grob, da hier nicht berücksichtigt wird, dass der Halbaddierer seinen Übertrag schneller liefert als sein Resultat und der jeweils erste Halbaddierer jedes Volladdierers gleichzeitig durchlaufen wird. Berechnen Sie die tatsächliche Schaltzeit eines 4-stelligen Ripple-Carry-Addiernetzes.

Hinweise:
XOR ist ein zusammengesetztes Gatter (es gilt nicht als ein einzelnes Gatter); berücksichtigen Sie die Inverter.

b) Gegeben sei ein 4-stelliges Carry-Bypass Addiernetz (siehe Vorlesung). Geben Sie zu jedem der fünf Fälle, in denen jeweils *genau eine* Inputleitung des 5-stelligen OR-Gatters 1 ist, ein konkretes Zahlenbeispiel an.

c) Sortieren Sie die unten stehenden vier Addiernetze nach ihren Schaltzeiten, d. h. die Dauer bis garantiert alle 32 Resultatbits und das Übertragsbit anliegen. Beginnen Sie mit dem Langsamsten. Liefern Sie eine intuitive Begründung für Ihre Entscheidungen. Eine ausführliche Schaltzeitberechnung wie in Teil (a) wird nicht erwartet. Weiterhin spielen die unterschiedlichen Hardwarekosten keine Rolle.

- $A_{20,8,4}$ sei das unten dargestellte Addiernetz.
- $A_{20,8,\hat{4}}$ sei $A_{20,8,4}$ mit $\tilde{A}_4$ erweitert zum Carry-Bypass Addierer.
- $A_{20,\hat{8},4}$ sei $A_{20,8,4}$ mit $\tilde{A}_8$ erweitert zum Carry-Bypass Addierer.
- $A_{\hat{20},8,4}$ sei $A_{20,8,4}$ mit $\tilde{A}_{20}$ erweitert zum Carry-Bypass Addierer.



Aufgabe 6: (⋆) Subtraktion zweier Boolescher Zahlen

In dieser Aufgabe sollen Sie Gatterschaltungen für einen Halbsubtrahierer und einen Vollsubtrahierer entwerfen. Ein Halbsubtrahierer subtrahiert zwei Dualziffern und erzeugt deren

[2] *W. Oberschelp, G. Vossen, Rechneraufbau und Rechnerstrukturen*, 10. Auflage, 2006.

Differenz und ein Unterlauf-Bit. Wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, dann wird das Unterlauf-Bit auf 1 gesetzt, andernfalls auf 0.

Ein Vollsubtrahierer besitzt drei Eingaben (Dualziffern) und zwei einstellige Ausgaben. Zwei der Eingaben sind die zu subtrahierenden Ziffern, die dritte Eingabe ist der Unterlauf der niederwertigen Bitposition. Die Ausgaben bestehen aus Differenz und neuem Unterlauf.

a) Stellen Sie Funktionstafeln für beide Bausteine auf. Hierzu ist es u.U. hilfreich, die schriftliche Subtraktion zweier Dezimalzahlen zu betrachten und dieses Verfahren auf die Subtraktion zweier Dualzahlen zu übertragen.

b) Leiten Sie für die Ausgaben beider Bausteine Boolesche Funktionen her.

c) Vereinfachen Sie die Booleschen Funktionen für den Vollsubtrahierer mit Hilfe eines Karnaugh-Diagramms.

d) Zeichnen Sie Schaltnetze für Halb- und Vollsubtrahierer.

Aufgabe 7: Karnaugh-Diagramm

Nebenstehende Tabelle zeigt eine unvollständige Wertetabelle einer Booleschen Funktion $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$, wobei $*$ sowohl für 0 als auch für 1 steht. Alle nicht aufgeführten Argumente (z. B. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 1)$) sind Don't-Care-Argumente (D).

x_1	x_2	x_3	x_4	g
0	$*$	0	$*$	1
0	1	$*$	0	1
1	0	1	0	1
$*$	1	0	0	1
0	0	1	$*$	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Bestimmen Sie eine disjunktive Form mit minimalen Kosten, die in allen Nicht-Don't-Care-Argumenten mit g übereinstimmt.

Aufgabe 8: ($\star$) Karnaugh-Diagramm

Die einschlägigen Indizes einer Booleschen Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ seien 0, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13 (vgl. Aufgabe 2.1).

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Karnaugh-Diagramms alle Primimplikanten von f.

b) Geben Sie ein **Minimalpolynom** für f an, d. h. eine Darstellung von f als disjunktive Form mit minimalen Kosten.[3] Wie hoch sind die Kosten?

c) Ist das von Ihnen angegebene Minimalpolynom eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz anhand des Karnaugh-Diagramms.

d) Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Quine und McCluskey alle Primimplikanten und das Minimalpolynom der Funktion f.

Aufgabe 9: Verfahren von Quine und McCluskey

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Quine und McCluskey alle Primimplikanten und Minimalpolynome der durch die DNF

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$$

gegebenen Booleschen Funktion.

[3] Zur Erinnerung: Die Kosten $K(d)$ einer disjunktiven Form d sind gleich der Anzahl der in d vorkommenden Disjunktions- und Konjunktions-Operatoren.