

Einführung in die Technische Informatik WS 2006/2007

Blatt 3: Minimierung und Fehlerdiagnose

Ihre Lösung zu den mit (★) gekennzeichneten Übungen sollen Sie am **17.11.2006** in der Übung abgeben. Die Bearbeitung der Aufgaben in Lerngruppen ist sinnvoll. Bitte geben Sie nur eine Lösung pro Lerngruppe ab.

Aufgabe 1: (★) Karnaugh-Diagramm für 5-stellige Boolesche Funktionen

0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 18, 19, 22, 23, 30 seien die einschlägigen Indizes einer Booleschen Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Zeichnen Sie zwei Karnaugh-Diagramme für die fünfstellige Funktion f : eins für $x_5 = 0$ und eins für $x_5 = 1$. Jedes Feld in einem der Diagramme besitzt dann außer seinen vier Nachbarn in diesem Diagramm noch einen „fünften Nachbarn“ an der entsprechenden Feld-Stelle in dem anderen Diagramm. Bestimmen Sie damit ein Minimalpolynom für f .

Aufgabe 2: (★) Testen von Schaltnetzen

Sei $f : B^4 \rightarrow B$ die Boolesche Funktion mit den einschlägigen Indizes 2, 3, 6, 7, 10, 14.

- Bestimmen Sie das (in diesem Fall eindeutige) Minimalpolynom von f .
- Zeichnen Sie den zugehörigen DAG und das zugehörige Schaltnetz mit „reinen“ Und-, Oder-, Nicht-Gattern (d. h.: keine Inverter direkt an Ein- oder Ausgängen von Gattern), und nummerieren Sie die Verbindungsdrähte (einheitlich in DAG und Schaltnetz).
- $f_i : B^4 \rightarrow B$ bezeichne die Boolesche Funktion, die dem DAG oder Schaltnetz entspricht, wenn der Draht mit Nummer i gerissen ist (0-Verklemmung, „Stuck-at-Zero-Fault“).
Bestimmen Sie die (möglichst kompakten) Darstellungen der f_i und welche der f_i identisch sind. Erstellen Sie die Ausfallmatrix und die Fehlermatrix.

- Welche minimalen Testmengen gibt es?¹

Aufgabe 3: Testen von Schaltnetzen

Sei $f : B^3 \rightarrow B$ die Boolesche Funktion mit den einschlägigen Indizes 2, 3, 6, 7.

- Bestimmen Sie das (in diesem Fall eindeutige) Minimalpolynom von f .

¹Zur Erinnerung: Eine Testmenge liegt vor, wenn sich durch Anlegen der Tests aus der Testmenge erkennen lässt, ob ein Drahttrissfehler vorliegt oder nicht. (Drahttrisse, die keinen Fehler verursachen, brauchen/können nicht betrachtet zu werden.)

- b) Zeichnen Sie den zugehörigen DAG und das zugehörige Schaltnetz mit „reinen“ Und-, Oder-, Nicht-Gattern (d. h.: keine Inverter direkt an Ein- oder Ausgängen von Gattern), und nummerieren Sie die Verbindungsdrähte (einheitlich in DAG und Schaltnetz).
- c) $f_i : B^4 \rightarrow B$ bezeichne die Boolesche Funktion, die dem DAG oder Schaltnetz entspricht, wenn der Draht mit Nummer i gerissen ist (0-Verklemmung, „Stuck-at-Zero-Fault“).
Bestimmen Sie die (möglichst kompakten) Darstellungen der f_i und welche der f_i identisch sind. Erstellen Sie die Ausfallmatrix und die Fehlermatrix.
- d) Welche minimalen Testmengen gibt es?²

Aufgabe 4: (★) OBDDs

Betrachten Sie die Boolesche Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1(x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2x_3) + (\bar{x}_1 + x_4)x_2\bar{x}_3.$$

(Dies ist keine disjunktive Form; achten Sie auf die Klammerung.)

- a) Bestimmen Sie ein Minimalpolynom³ für f .
- b) Geben Sie das minimale OBDD für f mit der Variablenordnung $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ an. Bestimmen Sie die zu diesem OBDD gehörende reduzierte Darstellung für f .
- c) Geben Sie das minimale OBDD für f mit der Variablenordnung $x_4 < x_3 < x_2 < x_1$ an. Bestimmen Sie die zu diesem OBDD gehörende reduzierte Darstellung für f .

Aufgabe 5: OBDDs

Betrachten Sie die vierstelligen Booleschen Funktionen f und g , die durch die folgenden Karnaugh-Digramme gegeben sind:

f		x_1x_2			
		00	01	11	10
x_3x_4	00			1	
	01		1	1	1
	11		1		1
	10				

g		x_1x_2			
		00	01	11	10
x_3x_4	00			1	
	01	1	1	1	1
	11		1		
	10				

- a) Bestimmen Sie ein Minimalpolynom für f mittels des Karnaugh-Verfahrens. Bilden Sie das OBDD für f mit der Variablenreihenfolge $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und minimieren Sie dieses. Bestimmen Sie die zu diesem OBDD gehörende reduzierte Darstellung für f , d. h., die sich aus dem minimalen OBDD ergebende disjunktive Form der Funktion f .

²Zur Erinnerung: Eine Testmenge liegt vor, wenn sich durch Anlegen der Tests aus der Testmenge erkennen lässt, ob ein Drahttrissfehler vorliegt oder nicht. (Drahttrisse, die keinen Fehler verursachen, brauchen/können nicht betrachtet zu werden.)

³Zur Erinnerung: Ein Minimalpolynom für f ist eine Darstellung von f als disjunktive Form mit minimalen Kosten.

- b) Wie Sie in Aufgabenteil a) anhand der Funktion f gesehen haben, existieren Boolesche Funktionen, für die das OBDD einer Variablenreihenfolge zu einer minimalen disjunktiven Form führt. Für die Funktion g ist dies nicht der Fall.

Bestimmen Sie zunächst ein Minimalpolynom für g mittels des Karnaugh-Verfahrens. Bilden Sie nun die beiden OBDDs für g mit den Variablenreihenfolgen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und minimieren Sie diese. Bestimmen Sie die zugehörige disjunktive Form.

Aufgabe 6: (★) Addierwerke

Demonstrieren Sie die Arbeitsweise eines Parallel-Addierwerks, eines Serien-Addierwerks und eines von-Neumann-Addierwerks (jeweils 4-Bit-Addierwerke) für die nacheinander ausgeführten Berechnungen $11 + 5$ und $14 + 12$, indem Sie die Inhalte vorhandener Delays schrittweise in einer Tabelle protokollieren.⁴

	S	U	Puffer		Akku	
			$P_3P_2P_1P_0$	dezimal	$A_3A_2A_1A_0$	dezimal
Start :	0	0	0000	0	0000	0
$11 + 5 :$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$14 + 12 :$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Aufgabe 7: Addierwerke

Demonstrieren Sie die Arbeitsweise eines Parallel-Addierwerks, eines Serien-Addierwerks und eines von-Neumann-Addierwerks (jeweils 3-Bit-Addierwerke) für die nacheinander ausgeführten Berechnungen $3 + 5$, indem Sie die Inhalte vorhandener Delays schrittweise in einer Tabelle protokollieren.

	S	U	Puffer		Akku	
			$P_2P_1P_0$	dezimal	$A_2A_1A_0$	dezimal
Start :	0	0	000	0	000	0
$3 + 5 :$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

⁴Das Status-Delay S entfällt natürlich bei Parallel- und Serien-Addierwerk.