

Aufgabe 2: Boolesche Algebra, Vereinfachung Boolescher Funktionen

- a) Zeigen Sie: $\{ \rightarrow, 0 \}$ ist funktional vollständig
(Tipp: Gucken Sie sich an, zu was \rightarrow aufgelöst wird - siehe dazu Fussnote 1)
- b) Zeigen Sie: $\{\text{NOR}\}$ ist funktional vollständig
- c) Vereinfachen Sie mittels der Gesetze der Booleschen Algebra:¹
 - (i) $((a \uparrow b) \cup \overline{(b \cap c)}) \leftrightarrow \overline{(a \uparrow b)}$
 - (ii) $((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \rightarrow ((x \uparrow y) \uparrow y)$

Aufgabe 3: (★)Karnaugh-Diagramm

Die einschlägigen Indizes einer Booleschen Funktion $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ seien 0,3,6,8,9,11,13,14.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Karnaugh-Diagramms alle Primimplikanten von f .
- b) Geben Sie ein **Minimalpolynom** für f an, d.h. eine Darstellung von f als DNF mit minimalen Kosten.²
- c) Ist das von Ihnen angegebene Minimalpolynom eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz anhand des Karnaugh-Diagramms.

¹Zur Erinnerung: $x \rightarrow y = \bar{x} \cup y$, $x \downarrow y = \overline{x \cup y}$, $x \uparrow y = \overline{x \cap y}$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \cap (y \rightarrow x)$

²Zur Erinnerung: Die Kosten $K(d)$ einer DNF d sind gleich der Anzahl der in d vorkommenden Disjunktions- und Konjunktions-Operatoren.

Aufgabe 4: Karnaugh-Diagramm mit fünf Variablen

Die einschlägigen Indizes einer Booleschen Funktion $f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$ seien 0, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 15, 17, 22, 25, 27, 28, 29, 31.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe von zwei Karnaugh-Diagrammen alle Primimplikanten der fünfstelligen Funktion f . Verwenden Sie dazu je ein Karnaugh-Diagramm für $x_5 = 0$ und $x_5 = 1$. Jedes Feld in einem der Diagramme besitzt dann außer seinen vier Nachbarn in diesem Diagramm noch einen 'fünften Nachbarn' an der entsprechenden Feld-Stelle in dem anderen Diagramm.
- b) Bestimmen Sie alle Minimalpolynome für f .
(Hinweis: Jedes Minimalpolynom für f enthält mindestens alle **Kernimplikanten** von f . Ein Kernimplikant von f ist ein Primimplikant, der mindestens eine Eingabe abdeckt, die von keinem anderen der Primimplikanten von f abgedeckt wird. Bestimmen Sie zuerst alle Kernimplikanten von f !)

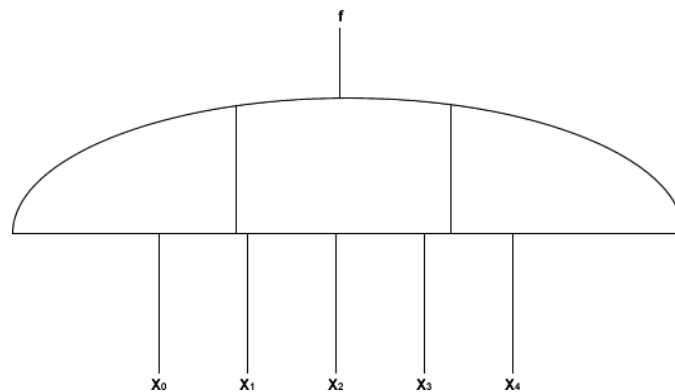
Aufgabe 5: (★)Überführung einer DNF in eine KNF

Überführen Sie die folgende Boolesche Funktion f in DNF mit Hilfe der De Morgan'schen Gesetze in eine äquivalente KNF:

$$x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 x_0$$

Aufgabe 6: (★)Logische Gatter

- a) Stellen Sie den folgenden Baustein nur durch Oder-Gatter mit zwei Eingängen dar:



- b) Die Funktion $f(x_2, x_1, x_0)$ hat die einschlägigen Indizes 2 und 5. Zeichnen Sie ein Schaltnetz. Es stehen Ihnen lediglich NAND-Gatter zur Verfügung.